主不等式の証明の大枠

jet の評価を軸にした整理（下書き）

Naoya Umezaki　　Claude

2026 年 11 月 28 日

この文書の文章は、すべて Claude（AI）が作成した。人間の著者は、内容をすべて理解・確認しているわけではない。

この文書について

注意。grh-lean の証明は、機械の検査（Lean の型検査と、使う公理の確認）を通っただけで、数学者が通して読んだものではなく、論文も付いていない（元のリポジトリの README による）。この文書は、その Lean のコードを読んで整理した記録で、リーマン予想・一般リーマン予想が証明されたと主張するものではない。証明の正しさについて、筆者は判断していない。

grh-lean の主不等式の証明を、CM テータ関数の jet（テイラー係数）の評価を軸にして組み立て直した大枠。Lean のコードは引かない。各部の主張の Lean での場所（両版）は、HTML の節「文書から移したコードの分析」（`study/report/index.html`）にある。内容は `study/notes/mainineq-grh.pdf` の調査（grh と grh-compact の両版）に基づく。証明の細部は読んでいない所が多く、各部の説明には推測を含む。

全体の見取り図

示したいのは、素数の和の誤差項についての片側の評価である。そのために、ある整な格子（目標の形式の格子）の余体積を、上と下から挟む。

- **上界**：短いベクトルを作ると、余体積はおよそ $d\,(\mathrm{main} - m \cdot \mathrm{rem})$ 以下。
- **下界**：整な格子なので、余体積はおよそ $d \cdot \mathrm{main}$ 以上。

比べると巨大な主項 main が消え、$m \cdot \mathrm{rem} \leq$（小さな誤差）が残る。rem は誤差項 $R_q(x)$ の組み合わせなので、これが片側の評価になり、Landau の補題を経て GRH に至る。

議論の中心は、**上界と下界の両方に同じ main が現れる理由**にある。両方とも、結局は同じ対象、すなわち CM テータ関数の jet の「大きさ」と「整除性」を数えていて、その評価が両向きとも鋭いので main がちょうど消える。以下この見方で全体を五つの部に分ける。

部	内容	役割
第 0 部	設定：CM 体、重さ、jet	舞台
第 1 部	jet の四つの評価	中心
第 2 部	橋渡し：対象を jet に結びつける	上界と下界で別の道
第 3 部	二つの不等式と主不等式	組み立て
第 4 部	誤差の制御	補助（数論幾何はここ）
第 5 部	主不等式から GRH へ	結論

第 0 部　設定

■体と素点。

- 素数 $d \equiv 7 \bmod 8$ による虚二次体 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$。$\chi_K$ は K の二次指標（ルジャンドル記号 $(\cdot/d)$）で、素数 p について $\chi_K(p) = 1$（p が K で分解）、-1（惰性）、0（$p = d$、分岐）。
- $E = K(\zeta) : K$ に 1 の原始 q_1 乗根 ζ を添えた CM 体。E の無限素点の全体 Φ は f 個で、$\mathrm{Gal}(E/K) \cong (\mathbb{Z}/q_1)^\times$ の作用で一つの群と見なせる。q_1 と素な整数 ν と素点 σ について、$-\nu\sigma$ は $-\nu$ の類が σ に作用した素点。
- a-place と b-place は、どちらも E の**無限素点**（有限素点ではない。E は CM 体なので全部複素素点）。$\Phi \cong (\mathbb{Z}/q_1)^\times$ を q_1 の約数 q_0 を法として $(\mathbb{Z}/q_0)^\times$ に落とした類で分ける：a-place は類が 1 の無限素点（Φ_a）、b-place は類が -1 の無限素点のまばらな集合（Φ_b）。Lean では両版とも Φ は `InfinitePlaceD.E`。
- 有限素点は、データで選ぶ素数 p_0, p_1 の上の素点（レベル）、整除性を数える素数 p、例外的な素数の上の印を付けた素点などとして別に現れる。整除性の勘定の「相手」$-p^e\tau$ は無限素点の側の話。

■尺度と重さ（どれも整数）。

- 三つの尺度 $x \ll x_1 \ll b$ は自然数で、$a = x\,b$ も自然数（長い行の長さ。grh の `Data.a` は自然数）。x_1 は b を割り切る。
- 各無限素点 σ の**重さ** $\kappa(\sigma)$ は自然数で、その素点での微分の階数。b-place では $\kappa = b = a/x$、そのほかの素点では $\kappa = a/x_1$（grh `weight_eq`、`cast_weight`）。a-place の長い行の長さは a。
- compact では、素数の和の中の重さを実数 $a/x \cdot a/x_1$（`nominalWeight`）で、大きさ s_∞ の中の重さを別の自然数（`w`）で持つ。

■テータ関数と jet。

- **一変数のテータ関数**：$\Lambda \subset \mathbb{C}$ を、K の整数環による CM を持つ格子（Lean の `CMLattice` の周期格子）とし、σ_Λ をそのワイエルシュトラスのシグマ関数とする。2 等分点 t でひねった平行移動 T_t をかけて 0 で 1 に正規化した

$$\theta_C(z) = \frac{(T_t\sigma_\Lambda)(z)}{(T_t\sigma_\Lambda)(0)} \qquad (z \in \mathbb{C})$$

が、ここでのテータ関数（複素一変数。楕円曲線 $\mathbb{C}/\Lambda$ の上の直線束の切断。両版で同じ定義：grh

Lib/CM/Sigma/Basic.lean:738、compact Lib/CM/Sigma/CurveTheta.lean:112）。

- **多変数のテータ積**：変数 z は、E の無限素点 w と座標の添字 c の組ごとに一つの複素変数を持つ：$z=(z_{(w,c)})\in\mathbb{C}^{\Phi\times n}$（変数の数は $f\cdot n$）。ベクトル $u\in E^n$ に対して

$$u^{\dagger}z=\sum_{(w,c)}\overline{\Phi_w(u_c)}\,z_{(w,c)}\in\mathbb{C}$$

（$\Phi_w:E\to\mathbb{C}$ は w での埋め込み）は z の一次式で、**テータ積**は一変数の θ_C をこれに合成して掛けたもの：

$$\Theta(z)=\prod_{j}\theta_C\big(u_j^{\dagger}z\big)^{m_j}.$$

ベクトルの族は「単位の分解」$\sum_j m_j u_j u_j^{\dagger}=1$ を満たすように取る（grh `IsResolution`、compact は tight frame `IsTightFrame`）。ヴェイユ表現の真空（標準的なシュワルツ関数）の平行移動から作ったテータ関数は、この形の積として書ける（grh Derivatives/Vacuum/StandardDataProducts）。

- **jet**：多項式 P について $\mathrm{jet}_P(F)=\big(P(\partial)F\big)(0)$（Lean の `jet`）。多変数の関数 Θ の偏微分を原点で評価したもので、テイラー係数を階乗倍したもの。「素点 σ で $\kappa(\sigma)$ 階」は、素点 σ に属する変数 $z_{(\sigma,c)}$ についての微分の階数のこと（a-place では a 階）。

■記号。

- Λ：フォン・マンゴルトの関数。$\nu=p^e$（p 素数、$e\ge1$）なら $\Lambda(\nu)=\log p$、そのほかは 0。
- $M=p_0p_1$：データで選ぶ二つの素数の積（主レベル）。
- $\Omega=\exp\big(\gamma-\mathrm{Re}\,L'/L(1,\chi_K)\big)\cdot 2\pi/\mathrm{rd}_E$（$\gamma$ はオイラーの定数、rd_E は E の根判別式。Lean の `bigOmega`）。CM の周期の平均の大きさに当たる。

■大きさと整除性の量。 j 階の jet について、二つの量を定める（grh Reduction/Data/AdmissibleData.lean）：

$$s_\infty(j)=\log j!+j\log(M/\Omega),\qquad s_{\mathrm{fin}}(j,\sigma)=\sum_{1\le\nu\le a}\Lambda(\nu)\big(1-\chi_K(\nu)\big)\big(j/\nu-\kappa(-\nu\sigma)\big)_+.$$

- **jet はどこに現れるか**：二つの式には jet そのものは書かれておらず、jet の**階数** j と**素点** σ だけで決まる数である。$s_\infty(j)$ は、σ の変数についての j 階の jet の大きさ（共役の絶対値の対数）の上界の目安（Lean の注釈：「the size of a derivative of order j」）。$\log j!$ はテイラー係数と微分の差（階乗）から、$j\log(M/\Omega)$ は変数の尺度から来る（M と Ω が入る詳しい理由は確かめていない）。$s_{\mathrm{fin}}(j,\sigma)$ は、その jet に保証される整除性（素数 p ごとの付値に $\log p$ を掛けて足したもの）。第 1 部の四つの評価が、jet とこれらの数を結ぶ。
- **ルジャンドルの公式**：素数 p について、$j!$ の p 進付値は $v_p(j!)=\sum_{e\ge1}\lfloor j/p^e\rfloor$。$\log p$ を掛けて p について足すと $\log j!=\sum_{\nu\le j}\Lambda(\nu)\lfloor j/\nu\rfloor$（チェビシェフの恒等式）。$s_{\mathrm{fin}}$ はこの形の和で、(i) 床関数の代わりに j/ν、(ii) 相手の素点 $-\nu\sigma$ の重さの分を引いて正の部分を取る（相手も高い階数の jet を持つと、その分の整除性を失う）、(iii) 係数 $1-\chi_K(\nu)$ を掛ける、の三点が違う。
- **分解しない素数への制限は、係数 $1-\chi_K(\nu)$ で分かる**：$\nu=p^e$ について $\chi_K(p^e)=\chi_K(p)^e$ な

ので、

$$1-\chi_K(p^e)=\begin{cases}0 & p\text{ が分解する }(\chi_K(p)=1),\\ 2 & p\text{ が惰性で }e\text{ が奇数},\\ 0 & p\text{ が惰性で }e\text{ が偶数},\\ 1 & p=d\text{ (分岐)}.\end{cases}$$

分解する素数の項は消え、分解しない素数（惰性か分岐）の項だけが残る。惰性なら奇数べきだけが効く。これは、CM 曲線のテータ関数が分解しない素数 p でだけフロベニウス合同 $\theta(\pi_p z)/\theta(z)^{q_p}\equiv 1 \pmod{\pi_p}$ を満たし、そこで jet に整除性が出ること（第 1 部の③）に対応する。

■主項。 持ち上げ m 本 × 方向 k 本の各方向について「大きさ − 整除性」を足したもの：

$$\mathrm{main}=mk\sum_{\sigma}\bigl(s_\infty-s_{\mathrm{fin}}\bigr)(\kappa(\sigma)).$$

第 1 部　jet の四つの評価

議論の中心。jet の大きさと整除性を、上からと下からの両方で評価する。

	アルキメデス的（大きさ）	p 進（整除性）
上から	① 大きさ $\le s_\infty$	④ 付値 $\le s_{\mathrm{fin}}$（鋭さ）
下から	② 大きさ $\ge s_\infty - O(f)$	③ 付値 $\ge s_{\mathrm{fin}}$

その前に、jet を計算しやすい形にする準備がある（⓪）。これは不等式ではなく、③と④の両方の土台になる。

- **⓪ 準備：正規形**：K で分解しない素数 p では、CM 曲線のテータ関数がフロベニウス合同 $\theta(\pi_p z)=\theta(z)^{q_p}(1+\pi_p H)$（$H$ は整な級数）を満たす。そこから、テータ積 F は、変数を ϖ 倍すると $F(\varpi z)=W\exp\bigl(c_\varpi\sum\lambda_{ej}\Gamma_e^{p^j}\bigr)$（$W$ は整、Γ_e は素点 τ とその相手 $-p^e\tau$ をつなぐ結合の級数）と書ける（**正規形**）。F の整でない部分が、明示的な指数関数の因子に集まる。
- **①**：テータ関数の jet の共役の大きさを、コーシー型の評価で抑える。
- **②**：ヘッケ L 値の代数的部分（ランク 1 のテータ持ち上げのノルム）の共役の大きさは、階乗と周期の積として**等式で**与えられる。
- **③**：正規形（⓪）の指数関数の係数を数えると、jet は少なくとも s_{fin} だけ割り切れる。相手の素点 $-p^e\tau$、e の範囲（惰性なら奇数）、ルジャンドル型の a/p^e は、正規形から来る。grh では、jet の付値（③）から持ち上げ一本の付値（③′）を出す二段になっている。
- **④**：同じ正規形から、ある jet はそれ以上は割り切れないことも示せる（評価は鋭い）。

①と②は⓪を使わない。上界は⓪を③を通して、下界は④を通して使う。四つの評価に共通の土台は、データ・CM 体・素点と、真空の整数性である。

■⓪ を使う評価（依存グラフで確かめた）。 正規形を述べる宣言は、grh では `exists_hasNormalForm`（定義は `HasNormalForm`、土台のフロベニウス合同は `exists_rescale_theta_eq_pow_mul_one_add_smul`）、compact では `thetaProducts_normal_form`。正規形・フロベニウス合同のモジュール

にある宣言を一つずつ見ても、①・②が使うものは無かった（両版）。

評価	⓪ を使うか	⓪ の閉包（New）との共通部分（grh ／ compact）	共通部分の中身
① 大きさ $\le s_\infty$	使わない	54 ／ 61	データ・体・素点の定義だけ
② 大きさ $= s_\infty$	使わない	65 ／ 69	同上
③・③′ 付値 $\ge s_{\mathrm{fin}}$	使う	⓪ を丸ごと（161 ／ 80）	
④ 付値 $\le s_{\mathrm{fin}}$	使う	⓪ を丸ごと（161 ／ 80）	

⓪ は分解しない素数での p 進の主張なので、p 進の整除性を数える③・④に要り、アルキメデス的な大きさを測る①・②には要らない（解釈）。正規形の正確な主張は、別の文書 `study/notes/normalform.pdf` にまとめた。

第 2 部　橋渡し：対象を jet に結びつける

上界と下界の直接の対象は jet ではない。恒等式で対象を jet で書ける量に書き換える。ここが上界と下界で別の道になる。

- **上界の橋（シーソー恒等式）**：上界の対象は、目標の形式（ポアンカレ級数の像）をテータ持ち上げの鎖で定値群に送った値。これをシーソー恒等式で、定値空間の持ち上げの鎖の有限結合（合成持ち上げ）に書き換える。各持ち上げの核の値は真空の jet なので、合成持ち上げの値は jet の積の和になる。
- **下界の橋（交換恒等式と Rallis の内積公式）**：下界の対象は、鎖の体積（グラム行列式）$Z(\xi)$ の、ひねらない場合とひねった場合の比。交換恒等式と正方形の可換性で一本ずつの持ち上げに分け、比較作用素でひねりへの依存をヘッケ L 値に押し込める。L 値は Rallis の内積公式でランク 1 の持ち上げのノルムであり、その値が jet で書ける。

どちらもテータ対応の恒等式だが、種類が違う。

第 3 部　二つの不等式と主不等式

- **上界（定理 A）**：合成持ち上げの大きさは①で上から、整除性は③で下から抑えられる。整除性の分だけ割っても整のままなので、源の空間を張る整な形式 φ と、有限群の元 s、$\sigma \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{C}$ について、目標の形式 $s\mathfrak{p}\varphi$ の持ち上げ $\Theta_1(s\mathfrak{p}\varphi)$ の長さは

$$\log\left\|\Theta_1(s\mathfrak{p}\varphi)\right\|_\sigma^2 \le \mathrm{main} - m\cdot\mathrm{rem} + \text{誤差}.$$

  rem が現れるのは a-place の長い行（長さ a）だけである。そこでは、レベル N の選び方で大きさを整除性の**期待値**にそろえてあり、実際の整除性（素数の和）との差が rem になる。
- **下界（定理 C）**：目標の格子が整であることは、多くのひねりを通した持ち上げが整であることとして定義されている。素数 ℓ ごとに一つのひねり ξ_ℓ を選び、ひねらないグラム行列式を「ひねったグラム行列式（ℓ で整）」と「体積の比」に分ける。体積の比は L 値の比の積で、②と④から、その高さは $-d\cdot\mathrm{main}$ 程度。積公式で

$$\text{余体積} \ge d\cdot\mathrm{main} - \text{誤差}.$$

- **主不等式**：定理 B（十分な数の形式がある）で上界の形式から基底を作り、ハダマールの不等式で余体積を上から抑えて下界と比べると、main が消えて

$$m \cdot \mathrm{rem} \le f a (\log b)^5.$$

第 3 部への補足　a-place の長い行とレベル N：rem が入る場所

実際に評価したい量（誤差項）が議論に入るのは、ここだけである。

- **a-place**：E の無限素点のうち、q_0 を法として 1 に当たるもの（$\#\Phi_a$ 個。compact は tops と呼ぶ）。合成持ち上げの重さのヤング図形は、a-place で長さ a（$= xb$）の長い行を持ち、ほかの素点では重さ $\kappa(\tau)$ の行だけを持つ。
- **アルキメデス的な大きさ**：長い行は、持ち上げ一本ごとに $s_\infty(a)$ だけ大きさに効く。m 本で $m\,\#\Phi_a\, s_\infty(a)$。
- **レベル N の選び方**：鎖を Y_m に制限すると、大きさが $\#\Phi_a\, a \log N$ だけ減る。素数 N は、この減り分が「長い行の大きさ − 整除性の期待値」をちょうど打ち消すように選ぶ：

$$\#\Phi_a\big(m(s_\infty(a) - s_{\mathrm{main}}) - a\log N\big) \le (\text{誤差}).$$

  ここで $s_{\mathrm{main}} = a\big(\log(a/\bar\kappa) + c_1\big)$ は、a-place での素数の和 $s_{\mathrm{fin}}(a,\tau)$ の期待値（$\bar\kappa$ は重さの幾何平均、c_1 は $L'/L(1,\chi_K)$ から来る定数）。こうして a-place の長い行の大きさは、期待値 $m\, s_{\mathrm{main}}$ にそろう。
- **整除性**：一方、長い行で実際に得られる整除性は $m\, s_{\mathrm{fin}}(a,\tau)$（素数の和そのもの）。
- **差**：長い行の寄与は $-m\big(s_{\mathrm{fin}}(a,\tau) - s_{\mathrm{main}}\big)$ で、a-place で足すと

$$-m \cdot \mathrm{rem}, \qquad \mathrm{rem} = \sum_{\tau \in \Phi_a} \big(s_{\mathrm{fin}}(a,\tau) - s_{\mathrm{main}}\big).$$

  実際の素数の和が期待値より大きいほど、形式は短くなる。
- **誤差項との関係**：素数の和は $\Lambda(n)(1-\chi_K(n))$ の重み付きの和なので、rem は二つの切り口 x, x_1 での誤差項で書ける：

$$\mathrm{rem} = a\Big(\#\Phi_b\big(R_{q_0}(x) - R_{q_0}(x_1)\big) + \#\Phi_a\, R_1(x_1)\Big).$$

■誤差項が出てくる仕組み。 この恒等式は、データの素点の類と重さを、jet の整除性の勘定に誤差項がちょうど現れるように選んであることから出る（両版で同じ形）。

1. a-place τ の長い行の jet は、分解しない素数のべき ν ごとにおよそ a/ν だけ割り切れるが、**相手の素点** $-\nu\tau$ の重さ $\kappa(-\nu\tau)$ の分だけ失う。これが $s_{\mathrm{fin}}(a,\tau) = \sum_\nu \Lambda(\nu)(1-\chi_K(\nu))\big(a/\nu - \kappa(-\nu\tau)\big)_+$ の形。
2. 素点の類と重さ：a-place は q_0 を法として 1 の類、b-place は -1 の類のまばらな集合で重さ $b = a/x$、そのほかの素点は重さ a/x_1。
3. $\tau \equiv 1$ なので、相手 $-\nu\tau$ が b-place（類 -1）になるのは $\nu \equiv 1 \pmod{q_0}$ のときだけ。

4. そのとき項は $(a/\nu - a/x)_+ = a(1/\nu - 1/x)$ で、$\nu \equiv 1 \pmod{q_0}$ について足すと $a\sum_{\nu\le x}\lambda(\nu)(1/\nu - 1/x)$、つまり $R_{q_0}(x)$ の定義の素数の和そのもの。ほかの相手では $(a/\nu - a/x_1)_+$ で、全部の ν について足すと $R_1(x_1)$ の和になる。
5. 主要部 $\log z/\varphi(q) + c_q$ は期待値 s_{main} と打ち消し合い、差として rem が残る。

解釈（推測を含む）：誤差項の重み $(1/n - 1/x)$ は長い行（長さ a）と b-place の行（長さ $b = a/x$）の比 $x = a/b$ から、法 q_0 で 1 の類という条件は a-place と b-place の類（± 1）の組み合わせから、係数 $1 - \chi_K(n)$ は分解しない素数でだけ整除性が出ること（CM のフロベニウス合同）から来る。Lean：grh `Data.totalRemainder_eq`（Reduction/PrimeSums.lean:177）、compact `Data.remainder_eq`（Endgame/ShortAndEnough.lean:86）。b-place がまばらな集合である理由（GUIDE は Behrend の構成を挙げる）は確かめていない。下界にはこの長い行が無いので、rem は現れない。主不等式で main が消えた後に残るのは、この長い行の分だけである。

第 4 部　誤差の制御

主項の勘定の外で、誤差を budget（$fa(\log b)^3$ 程度）に収める部分。

- **上界**：a-place どうしが「衝突」する例外的な素数では、整除性が足りない。ヘッケ作用素で取り戻し、そのとき失う指数を、辺のヘッケ作用素の単因子の評価（有限体の上の数え上げ）で抑える。
- **下界**：ひねった持ち上げとほかの形式の合同があると、射影に分母が出て主項の得を食う。合同の少ないひねりが素数ごとに選べることを、Ribet の方法（合同から Selmer 類）、保型形式に付くガロア表現、ひねりで Selmer 群を小さくする議論で示す。**数論幾何（ガロア表現、p 進ホッジ、志村多様体）はここだけで使う**（grh 版。compact 版ではトレースの比較にも使う）。
- **定理 B**：ポアンカレ級数の少数の平行移動が目標をほぼ張ることを、二次モーメント（展開、ベッセル関数、クルースターマン和、格子の数え上げ）で示す。

第 5 部　主不等式から GRH へ

rem は二つの切り口 x, x_1 での誤差項 R_q で書ける。主不等式から、片側の評価 $R_q(y) \le y^{-1/2+\varepsilon}$ が出る。誤差項のラプラス変換の極は L 関数の零点に対応し、係数 $\Lambda(n)(1 - \chi_K(n))$ が非負なので Landau の補題が使える。ひねった L の零点を d の選び方で避けると、$\mathrm{Re}\, s > 1/2$ に零点が無いことが出て、関数等式でリーマン予想に至る（詳細は `study/notes/endgame-grh.pdf`）。

この整理で見えること（推測を含む）

1. 上界と下界は同じ量（jet の大きさと整除性）を反対向きに測っていて、四つの評価がそろって鋭いので主項が消える。
2. 上界と下界の見かけの違いの大部分は、第 2 部の橋渡しの違い（シーソーか、交換恒等式と Rallis か）である。
3. 誤差項 rem が上界にだけ残るのは、a-place の長い行が上界にだけあるため。
4. 数論幾何は、第 4 部の下界の誤差の制御（良いひねり）にだけ現れる。

まだ詰めていない所

第 1 部の②（大きさの等式）と④（鋭さ）の証明。第 2 部の各恒等式の正確な形。第 3 部で、a-place の長い行とレベル N の役割をどう説明するか。第 4 部と第 3 部の境目（定理 B を第 3 部に入れるかどうか）。