テータ積の正規形

分解しない素数での主張（grh と grh-compact）

Naoya Umezaki　　Claude

2026 年 11 月 28 日

この文書の文章は、すべて Claude（AI）が作成した。人間の著者は、内容をすべて理解・確認しているわけではない。

この文書について

注意。grh-lean の証明は、機械の検査（Lean の型検査と、使う公理の確認）を通っただけで、数学者が通して読んだものではなく、論文も付いていない（元のリポジトリの README による）。この文書は、その Lean のコードを読んで整理した記録で、リーマン予想・一般リーマン予想が証明されたと主張するものではない。証明の正しさについて、筆者は判断していない。

jet の評価の準備 ⓪（`study/notes/outline-jet.pdf` の第 1 部）である「テータ積の正規形」の主張をまとめ、一変数の場合（命題 6）の証明の流れを述べる。多変数への広げ方と、正規形の性質の証明はまだ扱わない。主張は grh（`grh/src`、コミット `72fead1`）の Lean のコードから写し、記号は docstring に従った。compact 版の主張は最後の節で比べる。「**解釈**（推測を含む）：」の所は私の理解で、確かめていない。

目次

設定と記号 2

正規形の材料 3

主張（grh） 3

各部分の p 進の大きさ 5

記号の意味（気持ち） 6

正規形の性質と、それを使う評価 7

compact **版の主張** 7

一変数の証明の流れ（命題 6） 8

示すこと 8

材料：尺度 ϖ と形式的なパラメータ（Lib） 9
フロベニウス合同（FrobeniusCongruence.lean） 10
第 1 段：平均で悪い部分を取り出す 11
第 2 段：Ξ_1 の関数方程式 12
第 3 段：関数方程式から Ξ_1 の法 π_p での形を読み取る 13
第 4 段：λ は単元（惰性） 14
仮定の役割 14
まとめ（命題 6 の証明本体） 15

一変数から多変数へ（定理 5） 15

この文書で扱わなかったこと 16

設定と記号

- $d \equiv 7 \pmod 8$ は素数、$K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$、$\chi_K(n) = (n/d)$（ルジャンドル記号）。$E = K(\zeta_{q_1})$ は 1 の q_1 乗根を添えた CM 体で、E の無限素点の集合 Φ は $\mathrm{Gal}(E/K) \cong (\mathbb{Z}/q_1)^\times$ と同一視される。
- p は K で**分解しない**素数（$\chi_K(p) \neq 1$）：惰性（$\chi_K(p) = -1$）か分岐（$p = d$）。
- π_p：惰性なら p、$p = d$ なら $\sqrt{-d}$（`piPrime`）。q_p：惰性なら p^2、分岐なら p（`primeNorm`。p の上の K の素イデアルのノルム）。
- $\iota_p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_p$ は固定した埋め込み（`PadicPlacep`）。$\mathcal{O} = \{x \in \mathbb{C}_p : |x| \leq 1\}$ は $\mathbb{C}_p$ の整数環（`valRingCpp`）。$|p| = p^{-1}$ と正規化する。係数が $\mathcal{O}$ に入る冪級数を**整**と言う。
- C は K の整数環で CM を持つ複素格子、θ はその**テータ関数**：シグマ関数を位数 2 の点 t でひねって平行移動し、$\theta(0) = 1$ と正規化したもの。y は曲線の座標 $y(z) = (\wp'(z+t) - a_1 x(z))/2$（$x(z) = \wp(z+t) - \wp(t)$）。$\theta$ のテイラー級数を ι_p で $\mathbb{C}_p$ の係数に読む（`taylorVia`）。
- 変数は $z = (z_{(\tau,c)})$、$(\tau, c) \in \Phi \times n$（$n$ は有限集合）。
- **恒等の分解**（`IsResolution`）：E^n のベクトル $u_j\,(j \in J)$ と重複度 $m_j \in \mathbb{N}$ で、$z = \sum_j m_j\,(u_j^\dagger z)\,u_j$。ここで $u^\dagger z = \sum_{(\tau,c)} \overline{\tau(u_c)}\, z_{(\tau,c)}$ は一次形式。u_j の成分は p の上のすべての素点で整（`IsIntegralAbove`）とする。
- **テータ積**（`thetaProd`）：$\Theta(z) = \prod_j \theta(u_j^\dagger z)^{m_j}$。$\mathcal{O}[[y(u_j^\dagger z)]]$ は、$y(u_j^\dagger z)$ たちの整な冪級数の環（`multiSeriesRing`）。

■p と ι_p の扱い。 この文書の議論は、すべて、分解しない素数 p を一つと、環準同型 $\iota_p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_p$ を一つ固定した上で行う。ι_p は型クラス `PadicPlacep`（Lib/General/Algebra/AdicCompletion.lean:76）で与えられ、中身は準同型 `ι_p:ℂ→+*ℂ_[p]` だけである（同型や特別な性質は仮定しない）。正規形の補題は `[PadicPlacep]` を引数に取るので、どの p、どの ι_p についても成り立つ。出てくる ϖ、λ_{ej} は存在の形で取り出され、p と ι_p ごとに違ってよい。

- 使う側の jet の評価（③・④）でも `[PadicPlacep]` を引数に取ったままで、主張は「すべての素数 p とすべての ι_p について」の形（例：`∀(p:ℕ)[Factp.Prime][PadicPlacep],`…、形式の整数性 `∀j:PadicPlacel, Ξ∈integralFormsj`）。
- 高さの段（`HeightLe`、New/Reduction/Lattices/Heights.lean）では、素数 l と体の同型 $\mathbb{C} \simeq \overline{\mathbb{Q}}_l$ の組

PrimePadicIso を使い、すべての組について評価する。そこから PadicPlace を作るときは、同型に $\overline{\mathbb{Q}}_l \subset \mathbb{C}_l$ を合成する（New/OneLift/LiftVolumeHeight.lean:663、PadicPlace.ofIso）。同型が要るのはこの段だけ。

- ひねりの族 θ :PrimePadicIso→D.MFoldTwist（IsRegularFamily）は、組ごとに違うひねりを選んでよい形になっている（どう効くかは未読）。

正規形の材料

定義 1 (相手と指数の集合)**.** I_p°（partnerExponents）は、p が惰性なら奇数全体、$p = d$ ならすべての $e \geq 0$。素点 τ と $e \in I_p^\circ$ について、τ の**相手**は $\tau' = -p^e\tau : -p^e$ の $(\mathbb{Z}/q_1)^\times$ の類が名指す素点を τ に掛けたもの（Parameters.partner）。

定義 2 (結合と、その和)**.**

$$\Gamma_e = \sum_{(\tau,c)} z_{(\tau,c)}^{\,p^e}\, z_{(\tau',c)} \qquad (\tau' = -p^e\tau),$$

（coupling）。整数係数の多項式。整な数の族 $\lambda = (\lambda_{ej})_{e,j\geq 0}$（$\lambda_{ej} \in \mathcal{O}$）について

$$\Xi_\lambda = \sum_{e \in I_p^\circ} \sum_{j \geq 0} \lambda_{ej}\, \Gamma_e^{\,p^j}$$

（couplingSum）。これも整な冪級数。

定義 3 (ϖ の大きさと、c_ϖ)**.** $\rho_p = v(\pi_p)/(q_p - 1)$（varpiValuation）：惰性なら $1/(p^2-1)$、$p = d$ なら $1/(2p-2)$。$|\varpi| = p^{-\rho_p}$ を満たす $\varpi \in \mathbb{C}_p$ について

$$c_\varpi = \varpi^{p+1}/p.$$

定義 4 (正規形)**.** 冪級数 F が、I_p°、相手の規則、ϖ、λ について**正規形を持つ**（HasNormalForm）とは、整な冪級数 W があって

$$F(\varpi z) = W(z) \cdot \exp\bigl(c_\varpi\, \Xi_\lambda(z)\bigr)$$

となること。

Lean（New/Derivatives/Divisibility/NormalForm.lean:47）：

```
def HasNormalForm (S : Set ℕ) (pr : ℕ → Φ → Φ) (ϖ : ℂ_[p]) (l : ℕ → ℕ → valRingCp p)
    (F : MvPowerSeries (Φ × c) ℂ_[p]) : Prop :=
  ∃ W : MvPowerSeries (Φ × c) (valRingCp p),
    F.rescale (fun _ : Φ × c ↦ ϖ) =
      seriesToCp W * expSubst ((ϖ ^ (p + 1) / p) •  seriesToCp (couplingSum S pr l))
```

主張（grh）

定理 5 (テータ積の正規形)**.** p を K で分解しない素数とする。次を満たす $\varpi \in \mathbb{C}_p$ と $\lambda_{ej} \in \mathcal{O}$ がある。

(a) $|\varpi| = p^{-\rho_p}$。

(b) p が惰性なら、奇数 e について λ_{e0} は $\mathcal{O}$ の単元。

(c) 任意の恒等の分解 (u_j, m_j)（u_j は p の上で整）と、任意の $H \in \mathcal{O}[[y(u_j^\dagger z)]]$ について、$\Theta \cdot H = \prod_j \theta(u_j^\dagger z)^{m_j} \cdot H$ は（I_p°、相手 $-p^e\tau$、ϖ、λ について）正規形を持つ：

$$(\Theta H)(\varpi z) = W(z)\,\exp\Bigl(c_\varpi \sum_{e \in I_p^\circ} \sum_j \lambda_{ej}\,\Gamma_e(z)^{p^j}\Bigr), \qquad W \text{ は整.}$$

ϖ と λ は p（とデータ）だけで決まり、恒等の分解にも H にもよらない。

Lean（New/Derivatives/FormalGroup/ThetaProducts.lean:435）：

```
lemma exists_hasNormalForm (P : Parameters) (s : ℕ) [PadicPlace p] (hp : chiK P.d p ≠ 1) :
    ∃ (ϖ : ℂ_[p]) (l : ℕ → ℕ → valRingCp p),
    ‖ ϖ ‖ = p ^ (-varpiValuation P.d p) ∧
    (chiK P.d p = -1 → ∀ e : ℕ, Odd e → IsUnit (l e 0)) ∧
    ∀ {n J : Type} [Fintype n] [DecidableEq n] [Fintype J] (u : J → n → P.E s) (m : J → ℕ),
      IsResolution u m → (∀ (j : J) (i : n), IsIntegralAbove p (u j i)) →
        ∀ H ∈ P.cmCurve.multiSeriesRing (daggerForms u),
          HasNormalForm (partnerExponents P.d p) (P.partner s p) ϖ l
            (P.cmCurve.thetaProd (daggerForms u) m * H)
```

■一変数の形。 定理 5 は、まず一つの曲線（一変数）で次を示してから、恒等の分解で多変数に広げる。

命題 6 (一つの曲線)**.** ϖ（$|\varpi| = p^{-\rho_p}$）、$\Xi(0) = 0$ の整な級数 Ξ、整な級数 W、$\lambda_{ej} \in \mathcal{O}$ があって、

$$\theta(\varpi z) = W(z)\exp\bigl(c_\varpi\,\Xi(z)\bigr), \qquad \Xi(z) \equiv \sum_{e \in I_p^\circ} \sum_j \lambda_{ej}\bigl(z^{p^e} z\bigr)^{p^j} \pmod{\pi_p}.$$

惰性なら、奇数 e について λ_{e0} は単元。

Lean（New/Derivatives/FormalGroup/Exponent.lean:693）：`CMLattice.exists_exponent_tsum`

一変数の $z^{p^e} z$ が、多変数では結合 Γ_e になる。そのもとは次の合同式：$e \in I_p^\circ$ と $\alpha \in \mathcal{O}_E$ について

$$\tau(\alpha)^{p^e} \equiv \overline{\tau'(\alpha)} \pmod{\pi_p} \qquad (\tau' = -p^e\tau)$$

（`norm_pow_sub_conj_partner_le`、ThetaProducts.lean:132）。これで $\sum_j m_j (u_j^\dagger z)^{p^e} (u_j^\dagger z) \equiv \Gamma_e \pmod{\pi_p}$ になる（`piPrimeInt_dvd_sum_linearSeries_sub_coupling`、同 239 行）。

■曲線の CM と、E の CM。

- **曲線の CM が使われる所**：grh の New で CM 曲線（`CMLattice`、`cmCurve`）を使うのは、Derivatives/FormalGroup（この文書の正規形）、Derivatives/Vacuum（7 ファイル）、Derivatives/Sharpness（5 ファイル）。一変数の正規形の中では、π_p 倍が同種写像であること（フロベニウス合同の 1）、π_p 倍や 1 の $(q_p - 1)$ 乗根倍が $\mathcal{O}[[y]]$ を保つこと（Lib の形式群の材料。第 1 段の平均と ϖ の取り方）、ねじれ点での値の整数性、で使う。Vacuum では、保型形式の側の「標準データ」のテータ関数を曲線の θ の積に書き直す所（StandardDataProducts.lean）で、$\delta \in \mathcal{O}_K$ 倍の同種写像や、格子が $\mathcal{O}_K$ で保たれることを使う。
- **E との関係**：$E = K(\zeta_{q_1})$ の無限素点の集合 Φ は $\mathrm{Gal}(E/K)$ と同一視される。つまり Φ は $K \subset \mathbb{C}$ を固定して延びる埋め込みの全体で、K の CM 型から誘導された E の CM 型。保型形式の側で

は、E 上のエルミート空間（ランク n）のヴェイユ表現のテータ関数を $\mathbb{C}^{\Phi\times n}$ 上の関数として扱い、タイトなフレーム（恒等の分解）で $\prod_j \theta(u_j^\dagger z)^{m_j}$ と整な級数の積に書く（曲線は $\mathbb{C}/\Omega_0\mathcal{O}_K$）。**解釈**（推測を含む）：CM 型が K から誘導されているので、$\mathbb{C}^{\Phi\times n}$ を E の格子で割ったアーベル多様体は、K で CM を持つ楕円曲線の冪と同種になる。だから多変数のテータ関数が一変数の θ の積に分解できる、と読める。

- **多変数にしたとき E が効く所**：一変数から多変数への段（ThetaProducts.lean）では、曲線の CM はもう使わない。一変数の結果 $\theta(\varpi z) = W\exp(c_\varpi \Xi)$ に一次形式 $u_j^\dagger z$ を代入するだけ（`rescale_thetaProd_eq_mul_expSubst`）。E が効くのは、上の合同式 $\tau(\alpha)^{p^e} \equiv \overline{\tau'(\alpha)}$ で、中身は p のフロベニウスの E への働き：$\zeta \mapsto \zeta^{p^e}$ と、K の上では（p が惰性なので）複素共役。e が奇数なら K の上でも共役のままで、相手 $\tau' = -p^e\tau$ の $-$ は共役の分、p^e は ζ の冪の分。
- **二つの CM が出会う所**：どちらも「p は K で惰性」という同じ事実を使う。曲線の側では超特異になり、$q_p = p^2$、指数 e は奇数（一変数の (iii)）。E の側では、フロベニウスの奇数乗が K の上で共役になり、相手の規則 $-p^e\tau$ が決まる。一変数の $z^{p^e}z$（e 奇数）が、多変数では「素点 τ とその相手 $-p^e\tau$ の結合」になる。

各部分の p 進の大きさ

もの	主張	惰性（$q_p = p^2$）	分岐（$p = d$）
π_p		$\lvert p\rvert = p^{-1}$	$\lvert\sqrt{-d}\rvert = p^{-1/2}$
ϖ	$\lvert\varpi\rvert = p^{-\rho_p}$	$p^{-1/(p^2-1)}$	$p^{-1/(2p-2)}$
$c_\varpi = \varpi^{p+1}/p$		$p^{1-1/(p-1)}$（>1）	$p^{(p-3)/(2p-2)}$
$c_\varpi\,\pi_p$	$= p^{-1/(p-1)}$（`norm_pow_succ_div_mul_piPrimeInt`）	$p^{-1/(p-1)}$	$p^{-1/(p-1)}$
λ_{ej}	整（$\in \mathcal{O}$）	奇数 e の λ_{e0} は単元	主張に無い
Γ_e	整数係数の多項式	e は奇数	e はすべて
W	整な冪級数		

c_ϖ と $c_\varpi\pi_p$ の値は、$\lvert\varpi\rvert$ から計算したもの（惰性なら $\lvert\varpi^{p+1}\rvert = p^{-(p+1)/(p^2-1)} = p^{-1/(p-1)}$、これを $\lvert p\rvert = p^{-1}$ で割る）。

■大きさが表すこと。

- W **は整**。$F(\varpi z)$ の整でない部分は、すべて $\exp(c_\varpi\Xi_\lambda)$ に集まっている。
- c_ϖ **は整でない**（$\lvert c_\varpi\rvert > 1$、$p \geq 3$ の惰性の場合）。だから $\exp(c_\varpi\Xi_\lambda)$ は一般には整でない。
- $c_\varpi\pi_p$ **は、指数関数の収束の境目にちょうどある**：$\lvert c_\varpi\pi_p\rvert = p^{-1/(p-1)}$。$\lvert x\rvert \leq p^{-1/(p-1)}$ なら、$v_p(k!) \leq (k-1)/(p-1)$ から $\lvert x^k/k!\rvert \leq p^{-1/(p-1)} < 1$（$k \geq 1$）となり、$\exp(x\,G)$（$G$ は定数項の無い整な級数）は整になる。したがって、Γ_e **の値が** π_p **で割り切れる所では**、$\exp(c_\varpi\Xi_\lambda)$ は整になる。これが次の節の (1) の中身と思われる（解釈。証明は読んでいない）。
- **指数の中は** π_p **を法として決まれば十分**：Ξ を $\Xi + \pi_p G$ に変えても、$\exp(c_\varpi\pi_p G)$ は整なので W に吸収できる。主張で Ξ を π_p を法としてしか決めていない（命題 6）のは、このため（次の節の (5)）。
- λ_{e0} **が単元**であることは、整除性が実際に失われる（評価が鋭い）ことを示すのに使う（④）。

解釈（推測を含む）：$|\varpi| = p^{-\rho_p}$、$\rho_p = v(\pi_p)/(q_p-1)$ は、高さ 2 の形式群（超特異な CM 楕円曲線）の、零でない π_p 等分点の付値と同じ形をしている。ϖ は、その形式群の自然な尺度と思われる。

記号の意味（気持ち）

一変数の証明（節「一変数の証明の流れ」）を見ると、正規形の記号がどこから来るかが分かる。ここではそれをまとめる。惰性の場合（$q_p = p^2$、$\pi_p = p$）で書く。この節の多くは解釈を含む。

- c_ϖ**：最初の悪い項の大きさ。**$g = -\log\theta$ のうち、整でない分母を持つのは次数 $\equiv p+1 \pmod{q_p-1}$ の部分 $g^\flat$ だけ（第 1 段）。$g^\flat$ の最初の項は z^{p+1} で、その係数の大きさは $1/p$ 程度（p 倍が単元。第 4 段）。ϖ を入れると、この項は $(\varpi^{p+1}/p)\cdot(\text{単元})\cdot z^{p+1}$ になる。$c_\varpi = \varpi^{p+1}/p$ は、$-\log\theta(\varpi z)$ の最初の悪い項の大きさそのもので、それで割ると指数 Ξ は整になり、最初の係数は単元になる。
- ϖ**：形式群のフロベニウスが見える尺度。**$|\varpi| = p^{-\rho_p}$ は、形式的なパラメータ T について $T(\varpi z) = \varpi Y$、$Y \equiv \sum_j z^{q_p^j}$ となるように選ぶ（材料の小節）。また第 2 段で、ϖ^{q_p-1} が π_p と同じ大きさ、$q_p c_\varpi$ が $\pi_p\varpi^{p+1}$ と同じ大きさになり、関数方程式の割り算がちょうど合う。
- λ**：一変数では一つの数。**一変数では $\Xi \equiv \lambda Y^{p+1}$ で、展開するとすべての λ_{ej} が同じ λ になる（第 3 段）。主張で λ_{ej} を一般の族にしているのは、分岐の場合に $\lambda/2$、λ、2λ の三通りになることと、変数の尺度を変えると λ_{ej} が $\alpha^{(p^e+1)p^j}$ 倍される（性質 (3)）ことのため。単元であることは、超特異であること（x の z^{p-1} の係数が単元）から来る。
- Γ_e**：フロベニウスでひねったエルミート形式。**一変数の $z^{p^e}\cdot z$ は「変数の p^e 乗と、その変数自身の積」。多変数では、法 π_p で「p^e 乗 = 相手の素点 $-p^e\tau$ での複素共役」になる（節「主張（grh）」の合同式）ので、$\Gamma_e = \sum z_{(\tau,c)}^{p^e} z_{(\tau',c)}$ は、エルミート形式 $\sum z\bar{z}$ のフロベニウス版と読める。テータ関数の log の二次の部分はエルミート形式と関係が深く、その p 進の悪い部分が、このひねったエルミート形式の冪の和として現れている。次数 $p+1 = 1+p$ も、$z\cdot z^p$、つまり $z\cdot(z$ のフロベニウス$)$ の次数で、同じ成分を指している。「零錐の上で整」（性質 (1)）は、このひねったエルミート形式の零点の上で、という意味になる。

■jet の付値の中での役割（③・④ の予告）。 次数 $p+1$ の部分を選ぶのは、$-\log\theta$ の係数そのものの性質（フロベニウス合同）で、微分とは関係しない。一方、jet の付値で p が出てくるのは微分を通してである（New/Derivatives/Divisibility/Count.lean の注釈による）。

- jet $(Q(\partial)G)(0)$ は、l 次の係数に階乗を掛けたもの。G の l 次の係数が整なら、jet の付値は少なくとも $l/(p-1) - (\text{誤差})$（ルジャンドルの評価 `norm_jet_le_of_isHomogeneous`）。**整除性の利得の源は、微分の階乗。**
- 正規形は $F(\varpi z)$ について述べるので、l 次の係数は ϖ^l 倍され、1 次あたり ρ_p を失う。差し引きで箱一つあたり $\gamma_p = 1/(p-1) - \rho_p$ の利得（`gammaPrime`。惰性で $p/(p^2-1)$）。
- $\exp(c_\varpi\Xi)$ は整でないので、そのままではルジャンドルの評価を使えない。jet の次数に効く結合 Γ_e が π_p で割り切れるように一次の代入をして、その次数で整にし（性質 (1)）、代入の連鎖律で出る因子の分を差し引く。差し引く量は、素点 τ と相手 τ' の列の数で決まり、ここに s_{fin} の「相手の重さの分だけ失う」形が出る。

つまり、利得の源は微分の階乗で、正規形の整な部分 W はそれを保ち、悪い部分 $\exp(c_\varpi\Xi)$ が結合

Γ_e を通して利得の一部を削る。③ は λ_{ej} が整であることだけを、④ は λ_{e0} が単元であることを使う（単元なので、最初の結合の項が法 π_p で消えずに残り、整除性がそれ以上は増えない）。

正規形の性質と、それを使う評価

正規形から、次の性質が示されている（New/Derivatives/Divisibility/NormalForm.lean）。$S = I_p^\circ$ とする。

(1) **零錐の上の整数性**（`HasNormalForm.norm_coeff_subst_le_one`）：$|c_\varpi \pi| \le p^{-1/(p-1)}$ とし、Z_x を定数項の無い整な級数で、$e \le \log_p B$ の $e \in S$ について $\Gamma_e(Z)$ が π で割り切れるとする。このとき $F(\varpi Z)$ の B 次以下の係数は整。

(2) **代入**（`HasNormalForm.exists_subst_eq_mul_expSubst`）：定数項の無い整な Z について、$F(\varpi Z) = W' \cdot \exp\bigl(c_\varpi\, \Xi_\lambda(Z)\bigr)$（$W'$ は整）。

(3) **尺度の変更**（`HasNormalForm.rescale`）：整な α について、$F(\alpha z)$ も同じ ϖ で正規形を持ち、λ_{ej} は $\alpha^{(p^e+1)p^j}\lambda_{ej}$ に変わる。

(4) **ϖ の取り方**（`HasNormalForm.exists_of_norm_eq`）：$|\varpi'| = |\varpi|$ なら、ϖ' でも（別の λ' で）正規形を持つ。

(5) **法 π で十分**（`HasNormalForm.of_dvd_sub`）：$|c_\varpi \pi| \le p^{-1/(p-1)}$ のとき、$F(\varpi z) = W \exp(c_\varpi \Xi)$（$W$、$\Xi$ は整、$\Xi(0) = 0$）で $\Xi \equiv \Xi_\lambda \pmod{\pi}$ なら、F は正規形を持つ。

依存グラフで、どの jet の評価がどれを使うかを調べた（grh。study/tools/normal_form_users.py）。

	③ jet の付値 $\ge s_{\mathrm{fin}}$	③′ 持ち上げ一本	④ 鋭さ	①・②
定理 5（正規形の存在）	○	○	○	
(b) λ_{e0} が単元			○	
(1) 零錐の上の整数性	○	○		
(2) 代入	○	○	○	
(3) 尺度の変更	○	○	○	
(4) ϖ の取り方				
(5) 法 π で十分	定理 5 の証明の中で使う			

(b) は、③が使う所（Derivatives/Vacuum/Divisibility.lean:180）では捨てられ、④が使う所（Derivatives/Sharpness/Cases.lean:253）で使われる。(4) は主定理の閉包のどこでも使われていない。

compact 版の主張

compact では、正規形を一つの補題 `thetaProducts_normal_form`（New/Curve/ThetaProducts.lean:79）にまとめ、grh の定理 5 と性質 (1) を合わせた形で述べる。

定理 7 (compact)**.** p を分解しない素数とする。$|\varpi| = p^{-\rho_p}$、$|\pi| = p^{(\chi_K(p)-1)/2}$（つまり $|\pi| = |\pi_p|$）を満たす ϖ、π があって、$r \le 1$ と、テータ積の族 `Parameters.thetaProducts`（タイトなフレームに沿ったテータ関数の平行移動の積）のどの Θ についても：

(a) すべての B で、Θ は**零錐の上で整**（`IsIntegralOnNullCone`）：定数項の無い整な Z で、結合 $\sum Z_{(\sigma,c)}^{p^j} Z_{(-p^j\sigma,c)}$（$j \le \log_p B$、$j$ は奇数か $p = d$）が p と π を法として消えるなら、$\Theta(\varpi Z)$

の B 次以下の係数は整。

(b) p が惰性で $r=1$ なら、$\Theta(\varpi z)=\exp(\kappa\Psi)\,V$ と書ける。ここで $|\kappa|=p^{1-1/(p-1)}$、Ψ、V は整、$\Psi(0)=0$。さらに Ψ を剰余体に落としたものの偏微分 $\partial_x\Psi$ は、ちょうど単項式 $z_y^{p^j}$（j は奇数、$-p^j y=x$）で単元の係数を持つ。

■grh との対応。

- (a) は grh の性質 (1)（零錐の上の整数性）に当たる。compact は、正規形そのものではなく、その帰結を主張にしている。
- (b) の κ は grh の c_ϖ と同じ大きさ（惰性で $|c_\varpi|=p^{1-1/(p-1)}$）。Ψ は Ξ_λ に当たり、「$\partial_x\Psi$ が $z_y^{p^j}$ で単元の係数を持つ」は、grh の「λ_{e0} が単元」と、結合 Γ_e の形を合わせたものに当たる（解釈）。これは④（鋭さ）で使う。
- compact の π は、grh の π_p と同じ大きさで、存在だけを述べる。

一変数の証明の流れ（命題 6）

grh の New/Derivatives/FormalGroup/Exponent.lean と FrobeniusCongruence.lean の証明を、ファイルの注釈と各補題の主張と証明に沿ってまとめる。注釈は証明を四段に分けている。ここでは主に惰性の場合（$q_p=p^2$、$\pi_p=p$、$\rho_p=1/(p^2-1)$）を書く。依存の図は HTML の節「正規形（⓪）の証明：一変数の場合」（study/report/index.html）にある。閉包の New の部分は 59 宣言（930 行）で、Exponent と FrobeniusCongruence の二つのモジュールからなる。

示すこと

命題 (一つの曲線。命題 6 の再掲)**.** p を K で分解しない素数とし、θ のテイラー級数を ι_p で $\mathbb{C}_p$ の係数に読む。次を満たす $\varpi\in\mathbb{C}_p$、整な級数 Ξ、W、$\lambda_{ej}\in\mathcal{O}$ がある。

(i) $|\varpi|=p^{-\rho_p}$、$\Xi(0)=0$。
(ii) $\theta(\varpi z)=W(z)\exp\big(c_\varpi\,\Xi(z)\big)$（$c_\varpi=\varpi^{p+1}/p$）。
(iii) $\Xi(z)\equiv\sum_{e\in I_p^\circ}\sum_{j\ge0}\lambda_{ej}\big(z^{p^e}z\big)^{p^j}\pmod{\pi_p}$。
(iv) p が惰性なら、奇数 e について λ_{e0} は単元。

Lean（New/Derivatives/FormalGroup/Exponent.lean:702）：

```
theorem CMLattice.exists_exponent_tsum (hp : chiK d p ≠ 1) :
    ∃ (ϖ : 𝕄_[p]) (Ξ W : (valRingCp p)⟦X⟧) (l : ℕ → ℕ → valRingCp p),
      ‖ ϖ ‖ = p ^ (-varpiValuation d p) ∧
      constantCoeff Ξ = 0 ∧
      rescale ϖ (taylorVia ιₚ C.θ) = seriesToCp W * expSubst ((ϖ ^ (p + 1) / p) •  seriesToCp Ξ) ∧
      PowerSeries.C (piPrimeInt d) | Ξ - ∑' x : partnerExponents d p × ℕ,
        l x.1 x.2 •  (X ^ p ^ (x.1 : ℕ) * X) ^ p ^ x.2 ∧
      (chiK d p = -1 → ∀ e : ℕ, Odd e → IsUnit (l e 0))
```

証明で作るものは次のとおり（詳しくは各段）。$g=-\log\theta$、$g^\flat$ はその次数 $\equiv p+1\pmod{q_p-1}$

の部分として、

$$\Xi = \Xi_1 = -\,g^\flat(\varpi z)/c_\varpi, \qquad W = \exp\bigl(g^\flat - g\bigr)(\varpi z).$$

実際、$\theta = \exp(-g) = \exp(g^\flat - g)\cdot\exp(-g^\flat)$ に $z \mapsto \varpi z$ を代入すると (ii) になる。惰性では λ_{ej} はすべて同じ一つの数 λ で、分岐では一つの λ から $\lambda/2$、λ、2λ に振り分ける。

■示すことと、どの段でやるか。 上のように Ξ と W を置けば、(ii) は $\varpi \neq 0$ なら式変形だけで成り立つ（この時点では Ξ、W は $\mathbb{C}_p$ 係数の級数）。残りは次の四つ。

示すこと	どこでやるか	要る ϖ の条件
W が整	第 1 段（平均）と、材料の「ϖz を代入しても整」	$\lvert\varpi\rvert \le p^{-\rho_p}$ だけ
Ξ が整、かつ (iii)	フロベニウス合同 → 第 2 段 → 第 3 段	$\lvert\varpi\rvert = p^{-\rho_p}$ ちょうど（λ_{ej} が全部等しいには取り方も）
(iv) λ が単元	第 4 段（x の係数）と (iii)	ϖ によらない
$\Xi(0) = 0$	自明	なし

- $\Xi(0) = 0 : \theta(0) = 1$ なので $g(0) = 0$。そもそも $g^\flat$ は次数 $\equiv p+1$ の項だけを持ち、0 次はその類に入らない（$i_0 > 0$ と `coeff_exponentSeries_eq_zero_of_lt`）。
- **「Ξ が整」と (iii) は一度に出る**：第 3 段で、係数ごとに $[z^n]\Xi \equiv \lambda[z^n]Y^{i_0}$（$\mathbb{C}_p$ の中で、差の大きさが $\lvert\pi_p\rvert$ 以下）を示す。右辺は整なので Ξ も整。
- **(iv) も Ξ の法 π_p での性質**：(iii) から $\lambda \equiv [z^{p+1}]\Xi$ なので、新しく要るのは「$[z^{p+1}]\Xi = -p\,g_{p+1}$ が単元」だけ（ϖ によらない）。
- **ϖ の取り方が効く所**：W の整数性には大きさの上限だけ。第 2 段では大きさがちょうど $p^{-\rho_p}$ であること（$\lvert\varpi^{q_p-1}\rvert = \lvert\pi_p\rvert$、$\lvert u\rvert = 1$）。取り方そのもの（$\varpi^{q_p-1} = -\pi_p/b_1$）が効くのは第 3 段の展開の $Y \equiv \sum_j z^{q_p^j}$ だけ。同じ大きさの別の $\varpi' = \alpha\varpi$（α は単元）では、Y の係数に α の冪が掛かり、λ_{ej} が α の冪倍に変わる（(iii) の形は保たれる。性質 (4) `HasNormalForm.exists_of_norm_eq` と同じこと）。

■存在の形について。 Lean の主張は「存在する」の形だが、本当に選んでいるのは ϖ だけ（次の小節。$\varpi^{q_p-1} = -\pi_p/b_1$ の根を一つ取る）で、Ξ、W、λ は ϖ から式で決まる（λ の式は第 2 段）。途中の補題も　の形で述べられていて、式が主張に出ない。値を定義に起こす案は study/notes/refactor-ideas.md の「案 1 への追記 2」に記録した（実施しない）。

材料：尺度 ϖ と形式的なパラメータ（Lib）

$x(z) = \wp(z+t) - \wp(t)$、y を曲線の座標とし、T（`formalParam`）を y のテイラー級数の次数 $\equiv 1 \pmod{q_p - 1}$ の部分とする（形式群のパラメータ）。$\mathcal{O}[[y]] = \mathcal{O}[[T]]$（`integralSeriesRing`）。この環の元の係数は、次数 q_p 未満では整（`norm_coeff_le_one_of_lt`）。Lib の補題 `CMLattice.exists_scaled_formalParam`（Lib/CM/FormalGroup/FormalParameter.lean:224）が次を与える：$\lvert\varpi\rvert = p^{-\rho_p}$ の ϖ と整な級数 Y があって

$$T(\varpi z) = \varpi\, Y(z), \qquad Y - Y^{q_p} \equiv z, \qquad Y \equiv \sum_{j\ge 0} z^{q_p^j} \pmod{\pi_p}.$$

ϖ の取り方：$T(\pi_p z) = \pi_p T + b_1 T^{q_p} + \cdots$（$b_1$ は単元。`exists_rescale_piPrime_formalParam_eq`）と書いて、$\varpi^{q_p-1} = -\pi_p/b_1$ の根を一つ取る（代数閉体なので存在する）。$|\varpi^{q_p-1}| = |\pi_p|$ から $|\varpi| = p^{-\rho_p}$。根は $q_p - 1$ 乗根の分だけ任意。

また、$|\varpi| \le p^{-\rho_p}$ なら、$\mathcal{O}[[y]]$ の元 h について $h(\varpi z)$ は整（`rescale_mem_range_seriesToCp`）。h を T の整な級数に書き、$T(\varpi z) = \varpi Y$ が整だから。

この文書の方針（Lib は既知の結果として扱う）では、Lib の補題の証明は扱わない。

フロベニウス合同（FrobeniusCongruence.lean）

■示すことと、位置づけ。 示すのは $\theta(\pi_p z) = \theta(z)^{q_p}(1 + \pi_p H)$（$H \in \mathcal{O}[[y]]$）と、その $\log q_p g(z) - g(\pi_p z) \in \pi_p \mathcal{O}[[y]]$。

- **もともと知られている種類の事実**（推測）：p が超特異（惰性）なら、π_p 倍は形式群の上で法 π_p のフロベニウスの持ち上げ（$[\pi_p](T) \equiv T^{q_p}$、ルビン・テイトの形式群）で、整で係数がフロベニウスで動かない級数 f について $f(\pi_p z) \equiv f(z)^{q_p}$ が出る。楕円単数やコールマン級数の理論（de Shalit の本など）でおなじみの形。Exponent.lean の「文献との関係」は Bannai–Kobayashi、Bannai–Kobayashi–Yasuda などを挙げる。どの文献のどの命題と同じかは確かめていない。
- **Lean の証明は別の道**：$[\pi_p](T) \equiv T^{q_p}$ は使わない。外からの入力は下の 1（変換公式）だけで、2–4 はほぼ計算。

	中身	外からの入力
1	$\theta(\pi_p z)/\theta^{q_p}$ が x の次数 $< q_p/2$ の多項式	虚数乗法（π_p が次数 q_p の同種写像、$\pi_p\bar{\pi}_p = q_p$）と、テータ関数の空間の理論（Lib の `exists_polynomial_of_even`）
2	次数 $< q_p$ で g の係数の分母は高々 π_p	$x \in \mathcal{O}[[y]]$（Lib）と、$g'' = g''(0) + x$
3	$R \equiv 1$。R は低次なので、次数 $< q_p$ で確かめれば足りる	exp の整数性（一般論）
4	log を取る	log の整数性（一般論）

1 で Lib は「R の係数は整」も与える（θ のねじれ点での値の整数性 `hasIntegralValues_theta` から。Lib の注釈ではジーゲル関数の整数性（Ramachandra、Robert）の局所版）が、このファイルは次数の評価だけを使い、整数性は捨てている。鍵は 3 の考え方：形式群の全体を使う代わりに、「次数の低い所だけで勝負がつく」形にしている。

■各ステップ。 $g = -\log\theta$、g_n をその z^n の係数とおく。

1. **同種写像の変換公式**：$\theta(\pi_p z) = \theta(z)^{q_p} R(x(z))$、$R$ は次数 $< q_p/2$ の多項式（`exists_rescale_theta_eq_pow_mul_aeval`）。π_p 倍写像（次数 q_p の同種写像）に対するテータ関数の変換：$\theta(\pi_p z)$ は次数 q_p の偶な切断で、θ^{q_p} で割ると x の多項式になる。
2. **低い次数の係数**：$n < q_p$ では
   - $|\pi_p|\,|g_n| \le 1$（`norm_piPrime_mul_coeff_negLogTheta_le_one`）。$g'' = g''(0) + x$ から $n(n-1)g_n = [z^{n-2}]x$ で、$x \in \mathcal{O}[[y]]$ なので右辺は整。n、$n-1$ の一方は p と素で、他方は q_p 未満なので $|n(n-1)| \ge |\pi_p|$（惰性で p^2 未満の数は p で高々 1 回割れる）。$n = 2$ だけは別に扱う。

- $|(q_p-\pi_p^n)g_n|\le|\pi_p|$（`norm_coeff_smul_negLogTheta_sub_rescale_le`）。$|q_p-\pi_p^n|\le|\pi_p|^2$（$n\ge2$）と上の評価から。

3. **合同式**：$\theta(\pi_p z)=\theta(z)^{q_p}(1+\pi_p H)$、$H\in\mathcal{O}[[y]]$（`exists_rescale_theta_eq_pow_mul_one_add_smul`）。証明：
   - 1 から $R(x)=\exp\big(q_p g(z)-g(\pi_p z)\big)$。指数の級数の係数は、次数 q_p 未満では大きさ $\le|\pi_p|\le p^{-1/(p-1)}$（2 より）なので、$R(x)-1$ の係数も次数 q_p 未満では $\le|\pi_p|$。
   - $x=z^2+\cdots$ なので、x^i は z^{2i} から始まり、$\deg R<q_p/2$ の R の係数は、$R(x)$ の次数 q_p 未満の係数から三角に決まる。よって $R-1$ の係数は π_p で割り切れる（`norm_coeff_le_of_aeval`）。
   - $H=\pi_p^{-1}(R-1)(x)$ は x の整係数の多項式なので $\mathcal{O}[[y]]$ に入る。

   つまり、次数の低い多項式なので、q_p 未満の次数で確かめれば足りる。
4. **log を取る**：$q_p\,g(z)-g(\pi_p z)=\pi_p G$、$G\in\mathcal{O}[[y]]$（`exists_negLogTheta_frobenius_congruence`）。$G=\pi_p^{-1}\big(q_p g(z)-g(\pi_p z)\big)$ は具体的な級数で、$\exp(\pi_p G)=1+\pi_p H$ と $|\pi_p|\le p^{-1/(p-1)}$ から $G\in\mathcal{O}[[y]]$（Lib の `mem_of_expSubst_smul_eq`。$\log(1+\pi_p H)/\pi_p$ が整になる）。

第 1 段：平均で悪い部分を取り出す

$g^\flat$ を g の次数 $\equiv p+1\pmod{q_p-1}$ の部分とする（`negLogThetaPart`）。ζ を 1 の原始 (q_p-1) 乗根として

$$g^\flat(z)=\frac{1}{q_p-1}\sum_{i=0}^{q_p-2}\zeta^{-i(p+1)}\,g(\zeta^i z).$$

- **残りは整**：$\exp(g^\flat-g)\in\mathcal{O}[[y]]$（`expSubst_negLogThetaPart_sub_mem`）。$g$ の整でない分母は $g^\flat$ にしか無い。証明：
  - 上の式から $(q_p-1)(g^\flat-g)=\sum_i\big(\zeta^{-i(p+1)}g(\zeta^i z)-g(z)\big)$。よって

    $$\exp(g^\flat-g)^{q_p-1}=\prod_i\exp\big(\zeta^{-i(p+1)}g(\zeta^i z)-g(z)\big).$$

  - 右辺の各因子は $\mathcal{O}[[y]]$ に入る（Lib の `expSubst_rescale_sub_mem_of_pow_eq_one`）。**解釈**（推測を含む）：ζ は $\mathcal{O}_K/\pi_p=\mathbb{F}_{q_p}$ の乗法群のテイクミュラー代表で、形式群の自己準同型として働く。そのとき θ が ζ でどう変わるかを表す式と思われる。
  - q_p-1 は p と素なので、(q_p-1) 乗根を取っても $\mathcal{O}[[y]]$ に残る（Lib の `expSubst_mem_of_pow_mem`。$(1+u)^{1/m}$ の二項級数は、m が p と素なら整）。
- W **は整**：$W=\exp(g^\flat-g)(\varpi z)$ は、$\mathcal{O}[[y]]$ の元に ϖz を代入したものなので整（材料の小節の `rescale_mem_range_seriesToCp`）。
- したがって、$\Xi_1=-g^\flat(\varpi z)/c_\varpi$（`exponentSeries`）とおくと

  $$\theta(\varpi z)=W(z)\,\exp\big(c_\varpi\,\Xi_1(z)\big),\qquad W\text{ は整}$$

  （`exists_rescale_theta_eq_mul_expSubst`）。c_ϖ は、$-\log\theta(\varpi z)$ の最初の悪い項（次数 $p+1$、係数は $1/p$ 程度）の大きさで、それで割って Ξ_1 を整にする。この段ではまだ Ξ_1 が整であることは分からない（第 3 段で分かる）。

第 2 段：Ξ_1 の関数方程式

目標：g についてのフロベニウス合同 $q_p g(z) - g(\pi_p z) = \pi_p G$（$G \in \mathcal{O}[[T]]$）を、$\Xi_1$ についての次の式に書き換える。

$$\Xi_1(z) - \frac{1}{q_p}\,\Xi_1(\pi_p z) \;\equiv\; \lambda\, Y(z)^{i_0} \pmod{\pi_p} \qquad (\lambda \in \mathcal{O}). \tag{$*$}$$

係数で書くと、すべての n について $\bigl(1 - \pi_p^n/q_p\bigr)[z^n]\Xi_1 \equiv \lambda\,[z^n]Y^{i_0}$。$\Xi_1(z)$ と $\Xi_1(\pi_p z)$ を結ぶ式なので「関数方程式」と呼ぶ。この時点では Ξ_1 が整かは分からないので、「法 π_p」は $\mathbb{C}_p$ の中で「差の係数の大きさが $|\pi_p|$ 以下」の意味。i_0（`leastFlatDegree`）は $p+1$ と合同な最小の正の次数で、惰性では $p+1$、分岐では 2。

中身：合同式を別の合同式に書き換える計算で、四つの手順からなる。

■(a) **次数 $\equiv p+1$ の部分を取る。**（`exists_smul_negLogThetaPart_sub_rescale_eq`）級数 F の次数 $\equiv p+1 \pmod{q_p-1}$ の部分を $F^\flat$ と書く。$z \mapsto \pi_p z$ は各次数の係数に π_p^n を掛けるだけなので、$F(\pi_p z)^\flat = F^\flat(\pi_p z)$。よってフロベニウス合同の両辺の $\flat$ を取ると

$$q_p\, g^\flat(z) - g^\flat(\pi_p z) = \pi_p\, G^\flat.$$

右辺を計算する。$G = \sum_k a_k T^k$（$a_k \in \mathcal{O}$）と書く。T は次数 $\equiv 1$ の項だけを持つので、T^k は次数 $\equiv k$ の項だけを持つ。よって $G^\flat$ は $k \equiv p+1 \equiv i_0$ の項の和で、

$$G^\flat = \lambda' T^{i_0} + T^{i_0+(q_p-1)} H, \qquad \lambda' = a_{i_0} \in \mathcal{O},\ H \in \mathcal{O}[[T]]. \tag{1}$$

■(b) **z を ϖz にする。**（`exists_smul_rescale_negLogThetaPart_sub_rescale_eq`）(1) を代入した式に $z \mapsto \varpi z$ を施す。$T(\varpi z) = \varpi Y$ なので $T^{i_0} \mapsto \varpi^{i_0} Y^{i_0}$、$T^{i_0+q_p-1} \mapsto \varpi^{i_0}\varpi^{q_p-1} Y^{i_0+q_p-1}$。よって

$$q_p\, g^\flat(\varpi z) - g^\flat(\pi_p \varpi z) = \pi_p \varpi^{i_0}\bigl(\lambda' Y^{i_0} + \varpi^{q_p-1} R\bigr), \qquad R = Y^{i_0+q_p-1} H(\varpi z). \tag{2}$$

R は整（Y が整で、$H(\varpi z)$ も整。材料の小節）。

■(c) **左辺を Ξ_1 で書き、$-q_p c_\varpi$ で割る。**（`exists_functional_equation_exponentSeries`）定義 $\Xi_1 = -g^\flat(\varpi z)/c_\varpi$ から $g^\flat(\varpi z) = -c_\varpi \Xi_1(z)$、$g^\flat(\pi_p \varpi z) = -c_\varpi \Xi_1(\pi_p z)$。よって (2) の左辺は $-q_p c_\varpi\bigl(\Xi_1(z) - q_p^{-1}\Xi_1(\pi_p z)\bigr)$。両辺を $-q_p c_\varpi$ で割ると、$\mathbb{C}_p[[z]]$ の等式

$$\Xi_1(z) - \frac{1}{q_p}\Xi_1(\pi_p z) = u\lambda'\, Y^{i_0} + u\,\varpi^{q_p-1} R, \qquad u = -\frac{\pi_p \varpi^{i_0}}{q_p c_\varpi}. \tag{3}$$

■(d) **大きさを見る。** ここで ϖ の大きさが効く。

- $|u| = 1$（`norm_piPrime_mul_pow_leastFlatDegree_div`）。惰性では $q_p c_\varpi = p^2 \cdot \varpi^{p+1}/p = \pi_p \varpi^{p+1}$ なので、ちょうど $u = -1$。分岐では $u = -\pi_p/\varpi^{p-1}$ で、$|\varpi^{p-1}| = |\pi_p|$ から $|u| = 1$。
- $|\varpi^{q_p-1}| = |\pi_p|$（$\rho_p = v(\pi_p)/(q_p-1)$ だから）。R は整なので、余りの項 $u\varpi^{q_p-1}R$ の係数は大きさ $\le |\pi_p|$。

$\lambda = u\lambda' \in \mathcal{O}$ とおくと、(3) は $(*)$ になる。

■まとめ。 計算以外に効いている事実は二つだけ：(a) の「$\mathcal{O}[[T]]$ の元の次数の類の部分は T の冪で書ける」と、(d) の大きさの関係。

λ **の式**：$\lambda = u\lambda'$、λ' は $G = \pi_p^{-1}\big(q_p g(z) - g(\pi_p z)\big)$ を T の級数に書いたときの T^{i_0} の係数。惰性では $\lambda = -\lambda'$。

解釈（推測を含む）：ϖ の大きさ ρ_p と $c_\varpi = \varpi^{p+1}/p$ は、(d) の割り算がちょうど合うように選ばれている（ϖ^{q_p-1} が π_p と同じ大きさ、$q_p c_\varpi$ が $\pi_p \varpi^{i_0}$ と同じ大きさ）と読める。

第 3 段：関数方程式から Ξ_1 の法 π_p での形を読み取る

Ξ_1 は第 1 段で定義した具体的な級数で、係数も $n \equiv p+1$ について $[z^n]\Xi_1 = -(p/\varpi^{p+1})\,\varpi^n g_n$（それ以外は 0）と式で書ける。分からないのは、その係数の p 進の大きさと法 π_p での値。この段では、それを $(*)$ だけから読み取る。法 π_p では $(*)$ を満たす級数が一つに決まる（$\equiv \lambda Y^{i_0}$）、という意味で「解く」。以下、惰性の場合（$i_0 = p+1$、$q_p = p^2$、$\pi_p = p$）。

■(a) 第 2 項を落とす。（`norm_coeff_exponentSeries_sub_le`）$(*)$ の z^n の係数は、$x = [z^n]\Xi_1$、$\varepsilon = \pi_p^n/q_p$、$a = \lambda[z^n]Y^{p+1}$（整）として

$$|(1-\varepsilon)x - a| \le |\pi_p|.$$

- $n \le p$ では $[z^n]\Xi_1 = 0$（$n < i_0$ の項は無い。`coeff_exponentSeries_eq_zero_of_lt`）。
- $n \ge p+1\ (>2)$ では $|\varepsilon| = |p^{n-2}| \le |\pi_p|$（`norm_piPrime_pow_div_le`）。$x$ がまだ整か分からないので、次のように回る（`norm_sub_le_of_norm_one_sub_mul_sub_le`）：$(1-\varepsilon)x = a + (\text{小})$ は整、$1-\varepsilon$ は単元なので x は整、すると εx も大きさ $\le |\pi_p|$ なので $|x-a| \le |\pi_p|$。

よって、すべての n について $[z^n]\Xi_1 \equiv \lambda[z^n]Y^{p+1}$。級数で言えば、$(*)$ の $q_p^{-1}\Xi_1(\pi_p z)$ は法 π_p で効かない。

■(b) 整数性。（`exists_seriesToCp_eq_exponentSeries_of_inert`）(a) は「$\Xi_1 - \lambda Y^{p+1}$ の係数がすべて大きさ $\le |\pi_p|$」ということ。λY^{p+1} は整なので Ξ_1 も整で（`exists_seriesToCp_eq_and_C_dvd_sub`）、

$$\Xi_1 \equiv \lambda\, Y^{p+1} \pmod{\pi_p} \quad (\mathcal{O}[[z]] \text{ の中で}). \tag{4}$$

■(c) 剰余体で展開する。（`C_dvd_pow_sub_primePowerSeries_odd_mul_even`、`exists_eq_exponentSeries_dvd_sub_tsum_of_inert`）ここからは $\mathcal{O}/\pi_p$（標数 p）の上の計算だけ。

- $Y \equiv \sum_{j\ge 0} z^{p^{2j}}$（材料。$q_p = p^2$）。
- 標数 p では p 乗が和を保つので、$Y^p \equiv \sum_{j\ge 0} z^{p^{2j+1}}$。
- $Y^{p+1} = Y^p \cdot Y \equiv \sum_{a\ \text{奇数}} \sum_{b\ \text{偶数}} z^{p^a} z^{p^b}$。
- 各項を書き直す：$e = |a-b|$、$j = \min(a,b)$ とおくと $z^{p^a} z^{p^b} = (z^{p^e} z)^{p^j}$ で、e は奇数。逆に奇数 e と $j \ge 0$ を与えると、$(a,b) = (j+e, j)$ と $(j, j+e)$ のうち「a 奇数、b 偶数」を満たすのはちょうど一つ。よって対応は一対一。

(4) と合わせて

$$\Xi_1 \equiv \lambda \sum_{e\ \text{奇数}} \sum_{j\ge 0} \big(z^{p^e} z\big)^{p^j} \pmod{\pi_p}.$$

一変数では、**すべての** λ_{ej} **が同じ** λ。

■分岐の場合（$p = d$、$i_0 = 2$、$q_p = p$、$\pi_p^2 = -p$）。（`exists_seriesToCp_eq_exponentSeries_of_ramified`、`C_dvd_sq_sub_primePowerSeries_univ_sq`）

- (a) は $n \neq 2$ で同じ。$n = 2$ だけ $1 - \pi_p^2/q_p = 1 + 1 = 2$ で、$2[z^2]\Xi_1 \equiv \lambda[z^2]Y^2 \equiv \lambda$。2 は単元なので $[z^2]\Xi_1 \equiv \lambda/2 \equiv \lambda([z^2]Y^2 - 1/2)$。合わせて $\Xi_1 \equiv \lambda(Y^2 - z^2/2)$。
- 展開：$Y \equiv \sum_{i \geq 0} z^{p^i}$ なので $Y^2 \equiv \sum_{a,b} z^{p^a} z^{p^b}$。$a \neq b$ の項は (a, b) と (b, a) で二回、$a = b$ の項は一回現れる。$(e, j) = (|a - b|, \min(a, b))$ で書き直し、$z^2 = (z^{p^0} z)^{p^0}$ を引くと、係数は $\lambda/2$（$e = j = 0$）、λ（$e = 0$、$j \geq 1$）、2λ（$e \geq 1$）。

第 4 段：λ は単元（惰性）

1. Ξ_1 **の** z^{p+1} **の係数**：定義から $[z^{p+1}]\Xi_1 = -(p/\varpi^{p+1})\, \varpi^{p+1} g_{p+1} = -p\, g_{p+1}$（$\varpi$ によらない）。
2. x **の係数と結ぶ**：$g'' = g''(0) + x$ の z^{p-1} の係数を比べて $[z^{p-1}]x = (p + 1)p\, g_{p+1}$。$p + 1$ は単元なので、$|[z^{p+1}]\Xi_1| = |[z^{p-1}]x|$（`norm_coeff_exponentSeries_eq_one`）。
3. $[z^{p-1}]x$ **は単元**（`norm_coeff_taylorVia_translatedX_eq_one`、FrobeniusCongruence.lean の後半）。$h_n = [z^{p-1}]x^n$ とおく。
   - 漸化式：曲線の式 $x'^2 = 4x^3 + a_1^2 x^2 + 4x$ から $(x^n x')' = (4n + 6)x^{n+2} + (n + 1)a_1^2 x^{n+1} + (4n + 2)x^n$。左辺の z^{p-1} の係数は $p \cdot [z^p](x^n x')$ で、$x^n x' \in \mathcal{O}[[y]]$ の次数 $p < q_p$ の係数は整だから、p で割り切れる。よって $(4n + 6)h_{n+2} + (n + 1)a_1^2 h_{n+1} + (4n + 2)h_n \equiv 0$（剰余体で）。
   - $p = 2m + 1$ とする。h_1 が単元でないと仮定すると、$h_0 = 0$ から始めて、$n + 2 \leq m$ の間は $4n + 6 = 2(2n + 3)$ が単元（$2n + 3 < p$）なので、帰納法で $h_2, \ldots, h_m$ もすべて単元でない。
   - 一方 $x = z^2 + \cdots$ なので $h_m = [z^{2m}]x^m = 1$。矛盾。
4. $\lambda \equiv [z^{p+1}]\Xi_1 \pmod{\pi_p}$（第 3 段の展開で $z^{p+1} = (z^p z)^1$ の係数は λ）なので、λ も単元（`isUnit_of_piPrimeInt_dvd_sub`）。

解釈（推測を含む）：$[z^{p-1}]x$ が単元であることは、超特異であること（ハッセ不変量のような量）に当たる性質と思われる。

仮定の役割

一変数の正規形の仮定は、d が 8 を法として 7 と合同な素数であること（`PrimeSevenModEight`）と、CM 格子 C（`CMLattice`、Lib/CM/Sigma/Basic.lean:690）の条件、p が分解しないこと。格子の条件は構造体のフィールドとして入っている。それぞれを直接使う補題から、役割は次のとおり（依存の表は HTML の節「一変数の正規形の仮定の使われ方」）。

仮定	直接使う主な補題	正規形のどこに効くか
Λ が $\mathcal{O}_K$ で安定	$\alpha \in \mathcal{O}_K$ について $\theta(\alpha z) = \theta^{N(\alpha)} v$ ($v \in \mathcal{O}[[y]]$)、$\exp(\alpha\bar{\alpha} g - g(\alpha z))$ が整、$y(\alpha z)$ が整（Lib）；π_p 倍の変換公式（New）	$\alpha = \pi_p$ でフロベニウス合同（λ と関数方程式）。1 の冪根で第 1 段の「$\exp(g^\flat - g)$ は整」（W が整）
t は位数 2、$\omega t, \bar{\omega} t \notin \Lambda$	θ の乗数（変換則）の計算（Lib の CM/Sigma、CM/GoodReduction）	θ の変換則を決める。**解釈**（推測を含む）：2 は K で分解するので、t は 2 の上のどちらの素イデアルの等分点でもない「三つ目の」2 等分点
$\wp''(t) = 2$、$a_1^2 = 12\wp(t)$	x, y の微分方程式；判別式 $= a_1^4 - 64$；その大きさが 1（`norm_disc_eq_one`。ジーゲル単数の単数性）	a_1 は整（`norm_a₁_le_one`）、つまり良い還元のモデル。第 4 段の「λ が単元」で使う
$d \equiv 7 \pmod 8$	`QuadField.chiK_two`（2 は分解する）だけ	分解しない p は奇数。形式群の高さの評価と第 1 段の平均にも同じ道で届く
p は分解しない	ほとんどすべて	フロベニウス合同と、形式群の高さが 2 以下（Deuring の判定法の一部）

- $d \equiv 7 \pmod 8$ は、依存をたどると「2 が分解する $\Rightarrow$ 分解しない p は奇数」の形でだけ効いている。ジーゲル単数の補題 `norm_disc_eq_one` などは、docstring では $d \equiv 7 \pmod 8$ を仮定として書くが、依存の上では使っていない。
- compact の一変数の補題（`CMLattice.exists_formal_parameter`）の閉包には $d \equiv 7 \pmod 8$ が入らない。代わりに $p \geq 13$ を仮定していて、2 の扱いが要らないのだと思われる。格子の条件は grh と同じく Lib の中で使われる。

まとめ（命題 6 の証明本体）

`exists_scaled_formalParam` で ϖ、Y を取り、第 1 段で W と Ξ_1 を作る。$\Xi_1(0) = 0$ は、$0 < i_0$ だから。惰性なら第 3・4 段で $\lambda_{ej} = \lambda$（単元）、分岐なら λ_{ej} を $\lambda/2$、λ、2λ に振り分ける（`CMLattice.exists_exponent_tsum` の証明、55 行）。

■compact との違い。 compact の対応する補題 `CMLattice.exists_formal_parameter`（New/Curve/FormalParameter.lean:125、124 行）は、$p \geq 13$ を仮定し、$S - S^q \equiv X$（grh の Y に当たる）と、三項の正規形 $\psi \equiv u_0 X^2 + u_1 S^{p+1} + u_2 S^{p+q} \pmod \pi$（$u_1$ は惰性で単元）を一つの補題で述べる。New の部分は 4 宣言だけで、フロベニウス合同に当たるもの（`rescale_translate_eq_theta_pow_mul`、Lib/CM/LocalHeight/IsogenyIntegrality）などは Lib にある。compact では、⓪ の数学的な中身の多くが既知（Lib）の側に入っている。

一変数から多変数へ（定理 5）

New/Derivatives/FormalGroup/ThetaProducts.lean の `exists_hasNormalForm` の証明の大まかな形。依存の図と、この段で新しく入る宣言の分析は HTML の節「正規形：一変数から多変数へ」にある。

■議論の形。 一変数の結果を、一次形式を代入して掛け合わせ、合同式で整理する計算型の証明である。

1. **代入して掛ける**：一変数の正規形 $\theta(\varpi z) = W\exp(c_\varpi \Xi)$ に $z = u_j^\dagger z$（一次形式。係数は p の上で整）を代入し、重複度 m_j で掛け合わせる。$\Theta(\varpi z) = (\text{整}) \cdot \exp\big(c_\varpi \sum_j m_j \Xi(u_j^\dagger z)\big)$（`rescale_thetaProd_eq_mul_expSubst`）。整な級数 $H \in \mathcal{O}[[y(u_j^\dagger z)]]$ を掛けても、ϖz を代入すれば整のまま。
2. **結合に書き換える**：法 π_p で $\Xi \equiv \sum \lambda_{ej}(z^{p^e} z)^{p^j}$ なので、$\sum_j m_j \Xi(u_j^\dagger z) \equiv \sum \lambda_{ej}\big(\sum_j m_j (u_j^\dagger z)^{p^e}(u_j^\dagger z)\big)^{p^j}$（法 π_p では p^j 乗が和を保つ）。さらに、節「主張（grh）」の合同式 $\tau(\alpha)^{p^e} \equiv \overline{\tau'(\alpha)}$ と恒等の分解 $z = \sum_j m_j (u_j^\dagger z) u_j$ から、$\sum_j m_j (u_j^\dagger z)^{p^e}(u_j^\dagger z) \equiv \Gamma_e \pmod{\pi_p}$（`piPrimeInt_dvd_sum_linearSeries_sub_coupling`）。
3. **法 π_p で十分**：指数は $\Xi_\lambda = \sum \lambda_{ej} \Gamma_e^{p^j}$ と π_p を法として合う。$|c_\varpi \pi_p| = p^{-1/(p-1)}$ なので、性質 (5)（`HasNormalForm.of_dvd_sub`）で正規形になる。

■外からの入力。 この段で新しく入る外の数学は、円分体 $E = K(\zeta)$ での素数の分解とガロア作用という、初等的な代数的整数論だけである（p のフロベニウスが $\zeta \mapsto \zeta^{p^e}$ と、K の上の複素共役として働くこと。New/Derivatives/Field/PrimeDecomposition.lean と Lib の ClassField/Places）。大きな一般論は持ち込んでいない。一変数の段で入った CM 楕円曲線の理論（フロベニウス合同、形式群の尺度）に比べて軽い。

- grh：この段の New の宣言 105。議論の本体（ThetaProducts、Resolution、NormalForm）が約 500 行、体と素点の準備（Reduction/Data/FieldsAndPlaces、Field/PrimeDecomposition）が約 380 行。新しく入る Lib は 91 宣言で、円分拡大の素点とガロア群、冪級数の補題。
- compact：この段の New の宣言 76。新しく入る Lib は 738 宣言と多いが、主張の型に出る E の Weil データのインスタンスを経由した設定の側の依存（分解するヘッケ指標の存在、CM 体のノルム）で、この段の議論そのものではない。

この文書で扱わなかったこと

- 一変数から多変数への段の、各補題の中の証明（大まかな形だけ書いた）。
- 各補題の中の証明（tactic）と、Lib の `exists_scaled_formalParam` の証明。
- 性質 (1)–(3) の証明と、③・④ での使い方（jet の付値の勘定）。