# 主不等式の仕組み

grh-lean（grh 版）の Lean のコードに沿った整理

Naoya Umezaki　　Claude

2026 年 11 月 27 日

この文書の文章は、すべて Claude（AI）が作成した。人間の著者は、内容をすべて理解・確認しているわけではない。

## この文書について

**注意。**grh-lean の証明は、機械の検査（Lean の型検査と、使う公理の確認）を通っただけで、数学者が通して読んだものではなく、論文も付いていない（元のリポジトリの README による）。この文書は、その Lean のコードを読んで整理した記録で、リーマン予想・一般リーマン予想が証明されたと主張するものではない。証明の正しさについて、筆者は判断していない。

grh-lean の読みやすい版 grh/（コミット `72fead1`）の主不等式 `New.star_inequality` について、Lean のコードを読みながら議論した内容をまとめたもの。主不等式からリーマン予想までの流れは、別の文書 study/notes/endgame-grh.pdf（以下「前の文書」）にある。

各命題は、普通の数学の言葉で定理環境に書き、その後に Lean の主張をソースから文面のまま写した（場所は grh/src からの相対パス）。数学の言い換えは、主張・docstring・証明の注釈から読んだもの。「**解釈**（推測を含む）：」と書いた所は私の理解で、確かめていない。定理 A・B・C の証明の中身は読んでいない。Lean のコード全体の分析（依存の閉包、フォルダごとの集計、宣言の分布）は、HTML の節「文書から移したコードの分析」（study/report/index.html）にまとめた。

## 目次

**全体の要約** 2

**主不等式とは何か** 3

**証明の方針（MainInequality.lean）** 3

登場する対象 . . . . . 4
言葉：a-place と長い行 . . . . . 4
定理 A・B・C . . . . . 5
組み立て . . . . . 6

**ねじれた格子** 7

普通の格子から . . . . . 7

定義 . . . . . 7

**目標の格子：何の空間の、どういう内積か** 8

**下界の要** 9

**上界と下界の性格** 9
数論の道具はどちらで使うか . . . . . 10

**上界の中身：長さはどこから来るか** 10
「短い」の意味 . . . . . 10
証明の組み立て . . . . . 11
アルキメデス的な側 . . . . . 11
$p$ 進の側：整除性 . . . . . 12
まとめ：rem はどこで入るか . . . . . 14
上界の中で rem が関わる議論の流れ . . . . . 14
rem が誤差項になる仕組み . . . . . 16
定理 B の中身（ファイルの注釈から） . . . . . 17
上界が使う既知の理論 . . . . . 18

**下界の中身：主項はどこから来るか** 18
骨格：積公式とひねり . . . . . 18
主項：体積の比を三段に分ける . . . . . 19
部品（数論幾何でない部分） . . . . . 20
良いひねりと数論幾何 . . . . . 21
上界と下界の対比 . . . . . 22

**主項の出どころ：なぜ同じ量が両側に出るか** 22
二つの導出の合流点 . . . . . 22
下界の主要な組の比：四つの因子 . . . . . 23
結論：同じ jet を反対向きに抑える . . . . . 24
jet とは . . . . . 25
jet を調べる道具は共有されている . . . . . 25
jet に結びつける手続きは違う . . . . . 25

**群と道筋：どちらもデータで別の群に移る** 26

**確かめたこと・確かめていないこと** 26

# 全体の要約

**一言で。**保型形式の空間に「整の構造」と「内積」を入れて格子にし、その格子の余体積を、保型形式の具体的な構成と算術的な性質を使って上下から挟む。挟んだ両側に誤差項（素数の和）が現れ、

その差から誤差項が抑えられる。

**■誤差項は「整除性の勘定」として入る。** 長さや体積そのものが誤差項と直接結びつくのではなく、間にテータ関数の微分（ジェット）の**大きさと整除性**が入る。主項は

$$\mathrm{main} = m\,k \sum_{\sigma} \big(s_{\infty}(\kappa(\sigma)) - s_{\mathrm{fin}}(\kappa(\sigma), \sigma)\big) \qquad \text{(微分の大きさ} - \text{素数による割り切れ方)}$$

で、形式の長さの評価（定理 A(a)）には $\mathrm{main} - m \cdot \mathrm{rem}$ が入る。素数の和 $s_{\mathrm{fin}}$ は「どの素数でどれだけ割り切れるか」の勘定で、ゲルフォント–シュニレルマンの方法で $\mathrm{lcm}(1, \ldots, n) = e^{\psi(n)}$ が現れるのと同じ役割をする。（GUIDE の記述と定義からの理解。定理 A の証明の中では確かめていない。）

**■上界と下界で、使う保型形式の性質が違う。**

- **上界（短い形式が在る）**：具体的な構成とアルキメデス的な解析。ポアンカレ級数、それが目標を満たすこと（filling、ベッセル関数、二次モーメント）、テータの鎖とシーソー恒等式（合成持ち上げの大きさ）。
- **下界（余体積は小さすぎない）**：算術的な性質。整であることと積公式に加え、ひねった体積とひねらない体積の比が大きく割り切れること。ここに合同、ガロア表現、Selmer 群、p 進ホッジ理論（New/Congruences と Lib の重い部分）が使われる。

まとめると、**保型形式の解析的な構成（大きさ）と保型形式の算術（整除性）を、同じ格子の上でぶつけ、その差から素数の分布を抑える**構造である。

## 主不等式とは何か

**定理 1** (主不等式)**.** *パラメータ $P = (q_0, d)$ の任意の許容データ $D$ について $m \cdot \mathrm{rem} \le f\,a\,(\log b)^5$。*

Lean（New/Reduction/MainInequality.lean:87）：

```
theorem star_inequality {P : Parameters} (D : Data P) :
    D.m * D.totalRemainder ≤ D.f * D.a * D.logB ^ 5 := by
```

記号は前の文書の定義 1〜7 のとおり。要点だけ繰り返す。

- rem は、前の文書の補題 11 により、誤差項の組み合わせ $a\big(\#\Phi_b(R_{q_0}(x) - R_{q_0}(x_1)) + \#\Phi_a R_1(x_1)\big)$ に等しい。誤差項 $R_q(x)$ は、法 $q$ で 1 の類の、$K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ で分解しない素数べきの数え上げの誤差を、重み $1/t^2$ で平均したもの。
- $m, f, a, b$ は、証明のために選ぶ補助のパラメータ（$m$ はテータ持ち上げの数、$a = xb$ は微分の階数、$f$ は $E$ の無限素点の数、$b$ は重み）。主不等式はどの許容データでも成り立つので、後で $m \approx \sqrt{x}$ などと選ぶ。

**一言で。**条件を満たす $(q_0, d)$ とデータ $D$ について、$L$ 関数の族の誤差項の組み合わせが抑えられる。誤差項について言っている中身は $R_{q_0}(x) \lesssim (\log b)^6/m +$ (遠い点 $x_1$ の項) で、$m$ を $\sqrt{x}$ まで取れることが節約 $x^{-1/2}$ になる。

## 証明の方針（MainInequality.lean）

証明は 70 行ほどで、定理 A・B・C を組み合わせるだけ。

## 登場する対象

| 記号 | Lean | 意味（docstring から） |
|---|---|---|
| 源 src | `D.ramifiedSourceForms` | 定値ユニタリ群 $U(X_0)$（階数 $k$）上の代数的保型形式のうち分岐したもの |
| 目標、$d$ | `D.targetForms`、`targetDim` | $U(Y_0)$ 上の保型形式（主レベル、良い冪等元 $e_0$ の像） |
| $s\mathfrak{p}$ | `normalizedPoincares` | ポアンカレ級数 源 → 目標 を正規化し、有限群 G の元 $s$ で平行移動 |
| $\Theta_\vartheta$ | `D.Θϑ` | $m$ 個のテータ持ち上げの鎖（ひねり $\vartheta$。$\Theta_1$ はひねり無し） |
| 目標の格子 | `targetLattice` | 目標の形式のねじれた格子（節「ねじれた格子」） |
| main | `mainAmount` | $m\,k\sum_\sigma\big(s_\infty(\kappa(\sigma)) - s_{\mathrm{fin}}(\kappa(\sigma),\sigma)\big)$ |
| $s_\infty(j)$ | `jetSize` | $j$ 階の微分の大きさ $\log j! + j\log(M/\Omega)$ |

主項 main は、各無限素点 $\sigma$ での「微分の大きさ $s_\infty$ − その整除性の素数の和 $s_{\mathrm{fin}}$」の和（`directionAmount` の $mk$ 倍）。

## 言葉：a-place と長い行

この文書で何度も使う二つの言葉の定義。どちらもデータ $D$ の選び方の一部。

**■無限素点と、その類。** $E$ は虚二次体 $K=\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ に 1 の $q_1$ 乗根を添えた CM 体で、$E$ の無限素点（の代表の集合 Φ、`D.Φ`）は $\mathrm{Gal}(E/K)\cong(\mathbb{Z}/q_1)^\times$ と同一視される。$q_0$ は $q_1$ の約数で、素点 $\tau$ の**類**とは、$\tau$ に対応する $(\mathbb{Z}/q_1)^\times$ の元を $q_0$ を法として見たもの（`placeClass`）。整数 $\nu$ に対し、$\nu$ の類が名指す素点を $u(\nu)$ と書き（`placeOfInt`。$\nu$ が $q_1$ と素でなければ単位元）、$-\nu\tau = u(-\nu)\tau$ と略す。

**定義 2** (a-place と b-place)**.**
- **a-place**：類が $1 \bmod q_0$ の無限素点。その集合を $\Phi_a$ と書く（`aPlaces`、New/Reduction/Data/AdmissibleData.lean:238）。
- **b-place**：類が $-1 \bmod q_0$ の無限素点のうち、データで選んだまばらな集合 $\Phi_b$（`bPlaces`）。条件は、$\#\Phi_b \geq \#\Phi_a/\log b$ と、$kt$ 以下の素数についてまばら（`IsSparse`）であること。
- **重さ** $\kappa(\tau)$（`weight`）：b-place で $b = a/x$、それ以外の素点（a-place を含む）で $a/x_1$。ここで $a = xb$。

名前の由来について。**解釈**（推測を含む）：a-place は、下で述べる長さ $a$ の長い行を持つ素点。b-place は、重さ $b$ を持つ素点。compact 版では、a-place を tops（`Data.tops`）、b-place を thick（`Data.thick`）、重さを `nominalWeight`、$q_0$ を $N_0$ と呼ぶ。

**■重さの図形と、行。** 上界で使う源の形式は、定値ユニタリ群 $U(X_j)$ の上の代数的保型形式で、各無限素点 $\tau$ で $U(n_j)$ の既約な代数的表現に値を取る（$n_j = k+j(t+1)$ は $X_j$ の階数）。この表現の最高ウェイトを、ヤング図形で表す。Lean では、図形を**高さ** $h$ **の列の数** $c_\tau(h)$ で与える（`columnCount`、

New/UpperBound/Objects/Weights.lean:53）。

$$c_\tau(h) = \begin{cases} a & (h = 1,\ \tau \in \Phi_a) \\ 0 & (h = 1,\ \tau \notin \Phi_a) \\ \kappa_1(\tau) - \lfloor (k+t+1)/2 \rfloor & (h = k) \\ \Delta - (t+1) & (h > k,\ h \equiv k \bmod t+1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

（$\kappa_1(\tau) = \kappa(\tau) + \frac{3}{2}\Delta$ は持ち上げの重さ、$\Delta$ は間隔 `gap`。）図形の第 $i$ **行**の長さは、高さが $i$ 以上の列の数である。

**定義 3** (長い行)**.** a-place $\tau$ では、図形に高さ 1 の列がちょうど $a$ 本ある。高さ 1 の列は第 1 行にしか箱を持たないので、第 1 行は第 2 行よりちょうど $a$ だけ長い。この、第 1 行だけにある長さ $a$ の部分を**長い行**と呼ぶ（`longRow`、New/UpperBound/Divisibility/JetExponent.lean:63 の docstring：“the $a$ columns of height one at an $a$-place”）。a-place でない素点には長い行は無い。

具体的に、源の空間 $X_0$（階数 $k$）では、高さ $k$ の列は行列式の冪にすぎないので、a-place での表現は行列式の冪と $a$ 次の対称冪 $\mathrm{Sym}^a$ のテンソル積、それ以外の素点では行列式の冪だけになる（New/UpperBound/Divisibility/HeckeEdges.lean:605 の docstring：“At an a-place the weight is one row of length $a$”）。つまり**源の形式は、a-place でだけ大きなベクトル値（$a$ 次の多項式の空間に値を取る）を持つ**。

**■なぜ行が大事か。** 行の長さが、そのまま jet の階数になる。

- **大きさ**：テータ持ち上げの核は、真空のテータ関数の jet で書け、持ち上げの図形（`liftDiagram`。重さの図形から作る）の長さ $\ell$ の行ごとに $\ell$ 階の微分が現れ、大きさ $s_\infty(\ell)$ を持つ（`rowSizeSum`、`sqrt_weylNormSq_jetMap_le`）。長い行は $s_\infty(a)$、ほかの行は合わせて $k\, s_\infty(\kappa(\tau))$ ほど（`chainSize` の主要部）。
- **整除性**：分解しない素数 $p$ での整除性の予測（`predictedDivisibility`）は、長い行の長さ $a_\tau$ と、相手の素点 $\tau' = (-p^e)\tau$ の行で決まる：$(a_\tau/p^e - a_{\tau'} - \cdots)_+$。相手が b-place なら相手の行は短く（重さ $b$）、相手が a-place なら相手にも長い行があって整除性が失われる（**衝突**）。

「長い行」以外で「行」と言うときは、この図形の行（各 $\tau$ で $n_j$ 本）を指す。

## 定理 A・B・C

**定理 4** (B：十分な形式)**.** $d \geq 1$ で、G の部分集合 $t$ で $\#t \cdot \dim \mathrm{src} \leq 5d \log(1+2b^2)$ かつ、像 $s\mathfrak{p}(\mathrm{src})$（$s \in t$）が目標の $(1 - 4/b^2)d$ 次元以上を張るものが在る。

Lean（New/Reduction/ShortAndEnough.lean:448）：

```
theorem enough_forms :
    0 < D.targetDim ∧
    ∃ t : Finset D.chosenGL,
      #t * finrank ℂ D.ramifiedSourceForms ≤ 5 * D.targetDim * log (1 + 2 * D.b ^ 2) ∧
      (1 - 4 / D.b ^ 2) * D.targetDim ≤ finrank ℂ ↥(⨆ s ∈ t, (D.normalizedPoincare s).range) :=
```

**定理 5** (A(a)：短い形式)**.** 源は、すべての $\iota$ で整で、すべての $s \in \mathsf{G}$ と $\sigma \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{C}$ について

$$\|\Theta_1(s\mathfrak{p}\,\varphi)\|_\sigma^2 \le \exp\bigl(\mathrm{main} - m\cdot\mathrm{rem} + f a(\log b)^4\bigr)$$

を満たす形式 $\varphi$ で張られる。

Lean（New/Reduction/ShortAndEnough.lean:254）：

```
theorem span_short_integralRamified_eq_top :
    span ℂ {ϕ ∈ D.integralRamified | ∀ (s : D.chosenGL) (σ : ℂ ≃+* ℂ),
      (D.Θ 1 (D.normalizedPoincare s ϕ)).normSqAt σ ≤
        exp (D.mainAmount - D.m * D.totalRemainder + D.f * D.a * D.logB ^ 4)} = ⊤ := by
```

**定理 6** (A(b)：指数)**.** $s \in t$、$\varphi$ が整な源の形式であるような像 $s\mathfrak{p}\,\varphi$ からなる族は、指数 $\#t\cdot\dim\mathrm{src}\cdot 2fa(\log b)^3$ 以下。

Lean（New/Reduction/ShortAndEnough.lean:373）：

```
theorem indexLe_normalizedPoincare (t : Finset D.chosenGL) {n : ℕ} {y : Fin n → D.targetForms}
    (hy : ∀ i : Fin n, ∃ s ∈ t, y i ∈ D.normalizedPoincare s '' D.integralRamified) :
    D.targetLattice.IndexLe y (#t * finrank ℂ D.ramifiedSourceForms * (2 * D.errorUnit)) := by
```

**定理 7** (C：整な形式は長い)**.** $y_1,\dots,y_n$ を独立な目標の形式、$n \ge (1-4/b^2)d$ とし、指数 $\le \delta$、余体積 $\le c$ とする。このとき $c + 2\delta \ge d\bigl(\mathrm{main} - 3fa(\log b)^4\bigr)$。

Lean（New/Determinant/Twist/LongForms.lean:214）：

```
theorem integral_forms_long {n : ℕ} {y : Fin n → D.targetForms} {δ c : ℝ}
    (hy : LinearIndependent ℂ y) (hn : (1 - 4 / D.b ^ 2) * D.targetDim ≤ n)
    (h δ : D.targetLattice.IndexLe y δ) (hc : D.targetLattice.CovolumeLe y c) :
    D.targetDim * (D.mainAmount - 3 * (D.f * D.a * D.logB ^ 4)) ≤ c + 2 * δ := by
```

**補題 8** (ハダマール)**.** $\|\Theta_1 z_i\|_\sigma^2 \le e^h$（すべての $i,\sigma$）なら、$z_1,\dots,z_n$ の余体積は $nh$ 以下。

Lean（New/Reduction/Lattices/TwistedLattice.lean:317）：

```
lemma covolumeLe_of_normSqAt_le {n : ℕ} {z : Fin n → V} {h : ℝ}
    (hz : ∀ (i : Fin n) (σ : ℂ ≃+* ℂ), L.normSqAt (z i) σ ≤ exp h) :
    L.CovolumeLe z (n * h) :=
```

## 組み立て

定理 *1* の証明（*MainInequality.lean* の流れ）. $\mathrm{loss} = fa(\log b)^4$ とおく。(1) 定理 4 の $t$ を取る。(2) 定理 5 の短い形式の、$s \in t$ による像の中から、独立な $y_1,\dots,y_n$ を $n \ge (1-4/b^2)d$ 本取る（像の張る空間の基底）。(3) 補題 8 で、余体積 $\le n(\mathrm{main} - m\,\mathrm{rem} + \mathrm{loss})$。(4) 定理 6 と (1) の $\#t$ の評価で、指数 $\le d\cdot 10\log(1+2b^2)\,fa(\log b)^3$。(5) 定理 7 で $d(\mathrm{main} - 3\,\mathrm{loss}) \le n(\mathrm{main} - m\,\mathrm{rem} + \mathrm{loss}) + 2\cdot$指数。(6) $n \le d$ と $\mathrm{main} + \mathrm{loss} \ge 0$ から**主項 main が両辺で消え**、$n\cdot m\,\mathrm{rem} \le d\cdot$(誤差)。$n \ge d/2$ で割ると $m\,\mathrm{rem} \le 2\cdot$(誤差) $\le fa(\log b)^5$。 □

**方針を一言で。** 同じ格子（目標の形式の族）の余体積を上と下から挟む。上から（A・B）：作った形式は短く、長さの 2 乗の対数は $\mathrm{main} - m\,\mathrm{rem}$。素数の和が期待値より大きい（$\mathrm{rem} > 0$）ほど、形

式はさらに短い。下から（C）：整な形式の族は短すぎることができず、余体積は少なくとも $d \cdot \mathrm{main}$。比べると $m \operatorname{rem}$ はほぼ 0 以下。主不等式のファイルの docstring の言う「重み付けた非分解素数の上界」。

# ねじれた格子

## 普通の格子から

$\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ には、整の構造（どのベクトルが整か）と大きさ（内積）が在る。整な独立なベクトルのグラム行列式は正の整数で $\geq 1$（余体積の下界）。分母 $D$ を持つベクトルなら $\geq D^{-2n}$ 程度（指数による補正）。この「整なベクトルの族は短すぎることができない」が定理 7 の原型。

## 定義

**定義 9** (ねじれた格子)**.** 複素ベクトル空間 $V$ と、ひねりの集合 $T$（自明なひねり 1 を含む）について、ねじれた格子とは次の組：

1. ひねり $\xi$ ごとに、内積空間 $H_\xi$ と線形写像 $\Theta_\xi : V \to H_\xi$（持ち上げ）。
2. 素数 $l$ と同型 $\iota : \mathbb{C} \cong \bar{\mathbb{Q}}_l$ の組ごとに、$H_\xi$ の中の「$\iota$ で整なベクトル」の $\mathcal{O}_\iota$ 加群（複素数 $x$ が $\iota$ で整 $\iff |\iota(x)|_l \leq 1$）。素数ごとに別々に与える。
3. 各素数 $l$ について、「$l$ で許される」ひねりの指定。
4. 整の両立：$\xi$ が $\iota$ の素数で許されるなら、$\bar{\iota}$ で整なベクトルと $\iota$ で整なベクトルの内積は $\iota$ で整。
5. 自明なひねりの空間 $H_1$ に、内積が有理数の行列で書ける座標。

$y \in V$ が $\iota \mid l$ で整とは、$l$ で許される全部の $\xi$ で $\Theta_\xi y$ が整なこと。$\sigma \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{C}$ について $\|\Theta_1 y\|_\sigma^2$ は、$\Theta_1 y$ の座標に $\sigma$ を作用させて有理なグラム行列で測った長さ。

Lean（New/Reduction/Lattices/TwistedLattice.lean:109）：

```
structure TwistedLattice (V T : Type) [AddCommGroup V] [Module ℂ V] [One T] where
  Space : T → Type
  [normedAddCommGroup (ξ : T) : NormedAddCommGroup (Space ξ)]
  [innerProductSpace (ξ : T) : InnerProductSpace ℂ (Space ξ)]
  lift (ξ : T) : V →ₗ[ℂ] Space ξ
  IsAllowed : ℕ → T → Prop
  lattice (ξ : T) (ι : PrimePadicIso) : Submodule ι.integers (Space ξ)
  norm_inner_le_one {ξ : T} (ι : PrimePadicIso) (h ξ : IsAllowed ι.prime ξ) :
    ∀ φ ∈ lattice ξ ι.conj, ∀ φ' ∈ lattice ξ ι, ‖ ι.iso ⟪φ, φ'⟫_ℂ ‖ ≤ 1
  Coord : Type
  [fintypeCoord : Fintype Coord]
  coord : Space 1 →ₗ[ℂ] Coord → ℂ
  gramMatrix : Matrix Coord Coord ℚ
  posDef_gramMatrix : (gramMatrix.map (↑) : Matrix Coord Coord ℂ).PosDef
  inner_eq (φ φ' : Space 1) : ⟪φ, φ'⟫_ℂ = star (coord φ) ⬝ᵥ gramMatrix.map (↑) *ᵥ coord φ'
```

**定義 10** (余体積と指数)**.** 族 $y = (y_i)$ について：

- **余体積** $\leq c$（CovolumeLe）：すべての $\sigma \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{C}$ で、$\Theta_1 y$ のグラム行列式（座標に $\sigma$ を作用させたもの）の絶対値が $e^c$ 以下。アルキメデス的な大きさ。
- **指数** $\leq \delta$（IndexLe）：各 $\iota \mid l$ で、$\mathcal{O}_\iota$ 上の行列 $u$ が $y$ を $\iota$ で整なベクトルに移し、その損失

$e_l \geq 0$（行列式の付値）が $\sum_l e_l \log l \leq \delta$。行列はひねりによらない。非アルキメデス的な分母。

Lean（New/Reduction/Lattices/TwistedLattice.lean:159,275）：

```
def IndexLe (y : S → V) (δ : ℝ) : Prop :=
  ∃ e : ℕ → ℝ,
    (∀ l : ℕ, 0 ≤ e l) ∧
    (∀ U : Finset ℕ, (∀ l ∈ U, l.Prime) → ∑ l ∈ U, e l * log l ≤ δ) ∧
    ∀ ι : PrimePadicIso, ∃ u : Matrix S S ι.integers,
      ι.Carries u y (L.integralVectors ι) (e ι.prime)
def CovolumeLe (y : S → V) (c : ℝ) : Prop :=
  ∀ σ : ℂ ≃+* ℂ, ‖(formGram (L.gramMatrix.map (↑)) (L.conjCoord σ ∘ y)).det‖ ≤ exp c
```

**注意 11** (アラケロフ的なもの)**. 解釈**（推測を含む）：素数ごとの局所的な整の構造と、各共役 $\sigma$ でのエルミート計量を並べたもので、数の整数環の上のエルミート計量付きの格子（アデール的な格子）にあたる。ファイルの関連文献は Bost（2001）と Laurent（1994、補間行列式）。下界で使うのは交点理論ではなく、高さと積公式（0 でない代数的数の高さは 0 以上。`HeightLe`）だけ。**ソースに “Arakelov” の語は一度も出てこない**（grep で確かめた）。

## 目標の格子：何の空間の、どういう内積か

**定義 12** (目標の格子)**.** 目標の形式の空間を $V$、$m$ 重ひねりを $T$ として：

- 持ち上げ $\Theta_\vartheta$ は、$m$ 個のテータ持ち上げの鎖で、$y$ を**定値ユニタリ群 $U(Y_m)$ 上の代数的保型形式**（$\vartheta$ に合わせたレベルと指標、列の数で決まるワイル加群の重み）に送る。
- $\vartheta$ が $l$ で許される $\iff$ $\vartheta$ のモジュラスのノルムが $l$ と素。
- $\iota$ で整なベクトル：$\iota$ で整な形式（値が整）。
- 自明なひねりの座標：類の代表元 $g_c$（$c \in \Gamma\backslash G_f/K$）での値 $\varphi(g_c)$ の、ワイル加群の標準基底での成分。グラム行列はワイル加群の内積（有理数）。

Lean（New/Reduction/IntegralTargetForms.lean:64）：

```
def targetLattice : TwistedLattice D.targetForms D.MFoldTwist where
  Space (ϑ : D.MFoldTwist) := (D.levelPlaces ϑ.toTameChar).LevelForm (lastResidueLevel ϑ.toTameChar)
    (lastLevelChar ϑ.toTameChar) D.columnsY (D.lastEntry D.m)
  lift := D.Θ
  IsAllowed (l : ℕ) (ϑ : D.MFoldTwist) := l.Coprime ϑ.normQ
  lattice (_ : D.MFoldTwist) (ι : PrimePadicIso) := integralForms ι.place
  ...
  Coord := ValueIndex (lastResidueLevel (1 : D.MFoldTwist).toTameChar) D.columnsY
  coord := valueCoord
  gramMatrix := valueMetric (lastResidueLevel (1 : D.MFoldTwist).toTameChar) D.columnsY
```

**内積。** $\varphi = \Theta_1 y$ について

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{c \in \Gamma\backslash G_f/K} \langle \varphi(g_c), \varphi(g_c) \rangle_{\text{ワイル加群}},$$

ペテルソン内積の有限版。レベル $K$ は十分小さく、固定群 $\Gamma \cap g_c K g_c^{-1}$ は自明なので、重みは全部 1（`classAut_lastResidueLevel_eq_bot`）。共役 $\sigma$ は値の座標に作用させる。

**注意 13** (なぜ定値群に移すか)**.** 定値群の代数的保型形式は、有限集合 $\Gamma\backslash G_f/K$ の上の、ワイル加群

に値を取る関数（Gross の意味）で、0 次元の志村多様体の上の局所系の切断とみなせる。値が有限個なので、整の構造（値が整）と内積（有限和）が素朴に定義できる。**解釈**（推測を含む）：不定値群 $U(Y_0)$ の目標の形式を直接は測らず、テータの鎖で定値群に移して比べるのは、このため。

## 下界の要

**補題 14** (素数ごとのひねり)**.** $L$ をねじれた格子（持ち上げは単射）、$y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_{n'}$ を $V$ の基底、各 $\iota$ で $\xi_\iota$ を $\iota$ の素数で許されるひねりとする。

- $y$ の余体積 $\le c$、指数 $\le \delta$；
- $\gamma(\xi) \neq 0$ で、$\gamma(\xi)\Theta_\xi z_i$ は、$\xi$ が許される素数の上の全部の $\iota$ で整；
- $\|\Theta_1 z_i\|_\sigma^2 \le e^{b_{\mathrm{short}}}$；
- 族 $|\gamma(\xi_\iota)|^{-2}$ と $Z(1)/Z(\xi_\iota)$ の高さが、それぞれ $b_{\mathrm{denom}}$、$b_{\mathrm{volume}}$ 以下

とする（$Z(\xi) = \det(\Theta_\xi^* \Theta_\xi)$）。このとき

$$c + 2\delta + n'(b_{\mathrm{short}} + b_{\mathrm{denom}}) + b_{\mathrm{volume}} \ge 0.$$

Lean（New/Reduction/Lattices/TwistedLattice.lean:477）：

```
theorem covolume_add_index_nonneg {n n' : ℕ} {y : Fin n → V} {z : Fin n' → V}
    (h_inj : ∀ ξ : T, Function.Injective (L.lift ξ))
    (h_indep : LinearIndependent ℂ (Sum.elim y z)) (h_card : finrank ℂ V = n + n')
    {θ : PrimePadicIso → T} (h θ : ∀ ι : PrimePadicIso, L.IsAllowed ι.prime (θ ι))
    {c δ b_volume b_short b_denom : ℝ} (hc : L.CovolumeLe y c) (h δ : L.IndexLe y δ)
    {γ : T → ℂ} (h γ_ne : ∀ ξ : T, γ ξ ≠ 0)
    ...
```

**注意 15** (下界の強さはどこから来るか)**.** 補題 14 は、整なグラム行列式に積公式（0 でない代数的数の高さは 0 以上）を当てたもの。これだけでは下界 0（普通の格子の「整数は 1 以上」）しか出ない。定理 7 の大きな下界 $d\cdot\mathrm{main}$ には、**体積の比 $Z(1)/Z(\theta_\iota)$ の高さ $b_{\mathrm{volume}}$ が大きく負**であることが要る：ひねった持ち上げとひねらない持ち上げの体積の比が、素数ごとに大きく割り切れる。ひねった側で整なら、ひねらない側の行列式はそれだけ大きい。**解釈**（推測を含む）：$b_{\mathrm{volume}} \approx -d\cdot\mathrm{main}$ で、主項 main はここから出る（未確認。補題の形と、C の材料が `exists_hasSmallRatios_heightLe_liftDeterminant_div` であることとは合う）。

## 上界と下界の性格

| | 上界（A・B） | 下界（C） |
|---|---|---|
| 性格 | 短いベクトルを作る（構成。ミンコフスキー型） | 格子の余体積を下から抑える（評価） |
| 余体積の扱い | ハダマールで機械的に | 積公式＋体積の比の高さ |
| 中身の重さ | 形式が短いこと（A(a)） | ひねりとの体積の比 |
| 主項 main の出どころ | 合成持ち上げの大きさの評価（推測） | 体積の比の高さ（推測） |

上界は、余体積そのものというより**短い（ほぼ整な）独立なベクトルを、ほぼ全次元ぶん作る**話で、余体積は最後にハダマールで出すだけ。下界は、どの基底についても成り立つので、実質的に**整な目**

**標の形式の格子そのものの余体積の下界**（算術的な次数が小さい）。両側に同じ主項 main が現れて消え、差の $m\,\mathrm{rem}$ が残る。

### 数論の道具はどちらで使うか

依存の閉包を両版で比べると（集計は HTML の節「文書から移したコードの分析」（study/report/index.html））：

- ガロア表現・$p$ 進ホッジ理論・比較定理・エタールコホモロジー・志村多様体の整モデル・合同（Selmer 群）は、grh では**下界（定理 C）でだけ**使う。
- 上界（A・B）も純粋にアルキメデス的ではなく、CM 理論（CM 格子のテータ関数、形式群、等分点の値の整数性）と、素点・局所体・付値という古典的な算術を使う。上界にだけ現れる部分の中心は、ヴェイユ表現・テータ持ち上げ・シーソー、ポアンカレ級数・ベッセル関数・二次モーメントで、具体的な関数の積分の評価と実群の表現論。
- compact では、定理 B の中の次元の等式（目標の次元 ＝ 定値空間 $W_j$ の良い形式の次元。ヘッケ作用素のトレースが二つのユニタリ群の良い形式の上で等しいことの $T = 1$ の場合）の示し方が違う。grh は、良い形式への射影をラベルの冪等元に分け、試験関数が一つの分解する素点でカスプ的であることを示して簡単な跡公式を当てる。compact は、ラベルの剛性（ヘッケ固有系ごとに、選んだ素点で現れる原始的なラベルは高々一つ）を、保型形式に付くガロア表現の局所大域整合性から示して使う。**解釈**（推測を含む）：B で使うのは「目標の次元 $\leq$ 主レベルの形式の次元」の向きだけで、数学として数論幾何が要るのは C の方。

## 上界の中身：長さはどこから来るか

定理 5 の証明（New/Reduction/ShortAndEnough.lean:254 以下、30 行ほど）と、それが使う補題を読んだ。この節の主張と式はソースと docstring から写した。「**解釈**（推測を含む）：」の所は私の理解。

### 「短い」の意味

源の形式 $\varphi$ が**短い**（`IsShortB`）とは、次の二つが成り立つこと。

1. すべての素数 $p$ と $p$ 進の素点 $\iota : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_p$ で整（値の $p$ 進の大きさ `GaugeLe` が 1 以下）。
2. すべての $\sigma \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{C}$ と $g$ で、共役 $\sigma\varphi(g)$ のグラム行列によるノルムの 2 乗が $B$ 以下。

Lean（New/UpperBound/Size/ShortColumns.lean:155）：

```
def IsShort (B : ℝ) (φ : AlgForm n κ e) : Prop :=
  (∀ (p : ℕ) [Fact p.Prime] [PadicPlace p], GaugeLe 1 1 φ) ∧
  ∀ (σ : ℂ ≃+* ℂ) (g : Gf E n), weylNormSq (σ ∘ φ.val g) ≤ B
```

定理 5 の目標の側の主張も同じ形をしている。長さそのものはアルキメデス的なノルムだが、すべての有限素点で整という条件と組になっている。**積公式の見方で、すべての素点が長さに関わる。**

## 証明の組み立て

目標の形式は

$$y = s\mathfrak{p}\,\varphi = c_B\, c_{\mathrm{ss}}^{-1}\, \#\bar{\mathsf{G}}\; e_0\, s\, \mathcal{P}\varphi, \qquad c_B = \prod_{\ell} \ell^{-g_\ell}$$

（`normalizedPoincare`、ShortAndEnough.lean:185）。ここで $\ell$ は $x_1$ より小さい分解しない素数と $N$ を動き、$g_\ell = \lfloor \mathrm{gain}_\ell - \mathrm{err}_\ell \rfloor$（`invGainFactor`、`gainExponent`）。証明は四つの段からなる。

1. **シーソー**：$\Theta_1(\mathcal{P}\varphi)$ を、定値空間の鎖の有限結合である合成持ち上げ $\mathrm{compositeLift}(\varphi)$ に書き換える（定理 33）。
2. **アルキメデス的な大きさ**：$\|\sigma\,\mathrm{compositeLift}(\varphi)\|^2 \le \exp(B+\beta)$、$\beta = \mathrm{main} - m\,\mathrm{rem} + 2\sum_p \mathrm{gain}_p \log p + fa(\log b)^3$（補題 16）。
3. **良い射影**：$e_0 s$ を通すと、大きさに $x^{99}$ が加わる（`normSqAt_goodProjTranslate_le`）。
4. **$c_B$ を掛ける**：ノルムの 2 乗の対数が $2\sum g_\ell \log \ell$ だけ減り、$\beta$ の中の $2\sum \mathrm{gain}_p \log p$ と打ち消し合う（証明の注釈：“the gains cancel”）。残るのが $\mathrm{main} - m\,\mathrm{rem}$。

$c_B$ を掛けても整のままであることは、合成持ち上げが各 $\ell$ で $\ell^{\mathrm{gain}_\ell - \mathrm{err}_\ell}$ で割り切れることによる（節「$p$ 進の側：整除性」）。こちらは定理 6 の指数の評価に使われる。つまり**アルキメデス的な大きさと $p$ 進の整除性の差し引きが長さ**になる。

## アルキメデス的な側

**補題 16** (合成持ち上げの大きさ)**.** $\Psi$ をひねり無しの鎖のデータ、$\sigma \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{C}$ とする。源の形式 $\varphi$ の値の共役のノルムの 2 乗が $e^B$ 以下なら、合成持ち上げの値の共役のノルムの 2 乗は

$$\exp\Bigg(B + \mathrm{main} - m\,\mathrm{rem} + 2 \sum_{p\ \text{小さく分解しない}} \mathrm{gain}_p \log p + fa(\log b)^3\Bigg)$$

以下。

Lean（New/UpperBound/Size/ArchimedeanSize.lean:436）：

```
theorem weylNormSq_compositeLift_le {P : Parameters} {D : Data P}
    {Ψ : D.Translations →₀ ℂ} (h Ψ : D.IsChainDatum 1 Ψ) {σ : ℂ ≃+* ℂ} {ϕ : D.SourceForm} {B : ℝ}
    (hB : ∀ g : Gf D.E (D.X 0), weylNormSq (σ ∘ (ϕ : D.FormX 0).val g) ≤ exp B)
    (y : Gf D.E (D.Y D.m)) :
    weylNormSq (σ ∘ (compositeLift TameChar.one Ψ ϕ).val y) ≤
      exp (B + (D.mainAmount - D.m * D.totalRemainder +
        2 * ∑ p ∈ D.smallNonsplitPrimes, D.gain p * log p + D.errorUnit)) := by
```

**■証明の流れ（`weylNormSq_restrictedChain_le`、同じファイルの 359 行）。**

1. **一本の核**（`sqrt_weylNormSq_jetMap_le`）：$X_j \to X_{j+1}$ の持ち上げの核は、真空の平行移動のテータ関数の jet（テイラー係数）で書ける。共役のノルムを高々 $\exp(x^{50} + \mathrm{rowSizeSum}_j/2)$ 倍にする。$\mathrm{rowSizeSum}_j$ は、持ち上げの重さのヤング図形の各行の長さ $\ell$ について $s_\infty(\ell)$ を足したもの。

2. **鎖**：$m$ 本の核の積を、類と平行移動の有限和（項の数と係数は $e^{x^{30}}$ 程度）で足す。主要部は

$$\mathrm{chainSize} = m\Big(\#\Phi_a\, s_\infty(a) + k\sum_\tau s_\infty(\kappa(\tau))\Big)$$

（`chainSize`、214 行）。a-place では長さ $a$ の長い行、ほかでは重さ $\kappa(\tau)$ の行が効く。

3. $Y_m$ **への制限**：$\pi_N$ の冪を掛けて制限するので、$\#\Phi_a\, a\log N$ だけ得をする（`weylNormSq_restrictToY_le`）。
4. **レベル** $N$ **の選び方**：$N$ は、a-place での超過をちょうど打ち消すように取ってある。

$$\#\Phi_a\big(m(s_\infty(a) - s_{\mathrm{main}}) - a\log N\big) \le 32\, f a \log b$$

（`card_aPlaces_mul_excess_le`、130 行。docstring：“The level compensates the excess at all $a$-places together”）。ここで $s_{\mathrm{main}} = a(\log(a/\bar\kappa) + c_1)$ は a-place での素数の和の期待値（`mainPrimeSum`、New/Reduction/PrimeSums.lean:68）。

5. **数の組み替え**：恒等式

$$\mathrm{main} - m\,\mathrm{rem} + 2\sum_p \mathrm{gain}_p \log p = m\,\#\Phi_a\, s_{\mathrm{main}} + mk\sum_\tau s_\infty(\kappa(\tau))$$

（`mainAmount_sub_add_two_mul_sum_gain`、178 行）で、2.–4. の結果を補題の形にする。

**注意 17** (アルキメデス的な大きさが表すもの)**.** 2.–5. をまとめると、合成持ち上げの大きさ（の対数）はおよそ

$$\underbrace{m\,\#\Phi_a\, s_{\mathrm{main}}}_{\text{a-place：制限で調整した長い行}} \quad \underbrace{+ mk\sum_\tau s_\infty(\kappa(\tau))}_{\text{ほかの行}}$$

で、$s_\infty(j) = \log j! + j\log(M/\Omega)$ は $j$ 階の微分の大きさ（`jetSize`、New/Reduction/Data/AdmissibleData.lean:259）。**解釈**（推測を含む）：テータ関数の高い階数の微分（jet）の大きさを、コーシーの評価のように素朴に抑えたもの。a-place では、レベル $N$ の選び方で、大きさが整除性の**期待値** $s_{\mathrm{main}}$ にそろえてある。

## $p$ 進の側：整除性

**定義 18** (素数の和と利得)**.**

$$s_{\mathrm{fin}}(y,\sigma) = \sum_{1\le\nu\le a} \Lambda(\nu)\,\big(1-\chi_K(\nu)\big)\,\big(y/\nu - \kappa(-\nu\sigma)\big)_+$$

（`primeSum`、AdmissibleData.lean:251）。ここで $-\nu\sigma$ は、整数 $-\nu$ が名指す無限素点を $\sigma$ に掛けたもの。分解しない素数 $p$ での部分を $2\log p$ で割ったものを $s_p(y,\sigma)$ とし（`localPrimeSum`）、$\mathrm{gain}_p = m\big(\sum_{\tau\in\Phi_a} s_p(a,\tau) + k\sum_\tau s_p(\kappa(\tau),\tau)\big)$ とおく（`gain`、New/UpperBound/Size/ShortColumns.lean:83）。

定義からすぐに

$$2\sum_p \mathrm{gain}_p \log p = m\sum_{\tau\in\Phi_a} s_{\mathrm{fin}}(a,\tau) + mk\sum_\tau s_{\mathrm{fin}}(\kappa(\tau),\tau)$$

（`two_mul_sum_gain_mul_log`、ArchimedeanSize.lean:146）。

**補題 19** (分解しない素数での整除性)**.** $p < x_1$ を分解しない素数（ひねりのレベルと素）とする。整な源の形式 $v$ について、鎖の結合 $\mathrm{restrictedChain}(v)$ は付値 $\mathrm{gain}_p - \mathrm{loss}_p - m \cdot \mathrm{collisionSum}_p$ 以上を持つ。

Lean（New/UpperBound/Divisibility/LocalDivisibility.lean:190）：

```
lemma IsWeakChainDatum.gaugeLe_restrictedChain_collisionSum (h Ψ : IsWeakChainDatum θ Ψ)
    (hQ : p.Coprime θ.normQ)
    {v : D.SourceForm} (hv : v ∈ D.integralSourceForms) (hp_small : D.IsSmallNonsplit p) :
    GaugeLe 1 (p ^ (D.m * D.collisionSum p ⌀ + D.loss p - D.gain p)) (restrictedChain θ Ψ v) := by
```

**■証明の材料。** 持ち上げ一本ごとに付値が `divisibilityBound` だけ上がり、それを $m$ 本足す。一本の付値は**予測される整除性**（`predictedDivisibility`、New/Derivatives/Divisibility/Count.lean:422）から、$fn^3(1+\log_p(\cdot))$ 程度の誤差を引いたもの（`mem_raises_predictedDivisibility`、New/UpperBound/Kernels/ThetaLiftGauge.lean:335）。予測される整除性は

$$v(\pi_p)\sum_{e\in I_p}\sum_{\tau}\Big(\big(a_\tau/p^e - a_{\tau'} - a'_{\tau'}\big)_+ + \big(l_\tau/p^e - l_{\tau'}\big)_+ - a'_\tau/p^e\Big), \qquad \tau' = (-p^e)\tau.$$

ここで $a_\tau$ は高さ 1 の列の数（長い行の長さ）、$a'_\tau, l_\tau$ はほかの低い列の数と箱の数。$I_p$ は、$p$ が惰性なら奇数の全体、$p = d$ なら $e \geq 1$ の全体、$p$ が分解するなら空。

**注意 20** (整除性の形)**. 解釈**（推測を含む）：

- $\sum_e a/p^e$ は、$a!$ の $p$ 進付値のルジャンドルの公式 $\sum_e \lfloor a/p^e \rfloor$ と同じ形。$s_\infty(a)$ の $\log a!$ に対応する整除性が、分解しない素数でだけ得られる。
- $(1-\chi_K(p^e))$ は、$p$ が惰性で $e$ が奇数なら 2、偶数なら 0。これが $I_p$（惰性なら奇数の $e$）とちょうど合う。$s_{\mathrm{fin}}$ の $(y/\nu - \kappa(-\nu\sigma))_+$ は、上の式の $(a_\tau/p^e - a_{\tau'} - \dots)_+$ の形。
- 分解しない素数で整除性が出るのは、$K$ による CM を持つ格子のテータ関数のフロベニウス合同による：分解しない $p$ で $\theta(\pi_p z)/\theta(z)^{q_p} \equiv 1 \pmod{\pi_p}$（`exists_rescale_theta_eq_pow_mul_one_add_smul`、New/Derivatives/FormalGroup/FrobeniusCongruence.lean）。$K$ で分解しない素数は、CM 楕円曲線の超特異な素数。これが $\lambda(n) = \Lambda(n)(1-\chi_K(n))$ の出どころと思われる（Derivatives の中の証明は読んでいない）。

**■衝突と、有限体の上の数え上げ。** a-place $\tau$ の相手 $\tau' = (-p^e)\tau$ がまた a-place だと、$a_{\tau'} = a$ で $(a/p^e - a)_+ = 0$ になり、整除性が失われる（**衝突**、`IsCollision`、ShortColumns.lean:123）。

- 例外的でない素数では、衝突の和は小さく、損失 $\mathrm{loss}_p = fa(\log b)^2/p$ に収まる（LocalDivisibility.lean の冒頭）。
- **例外的な素数**（$p$ が惰性、$p \not\equiv \pm 1 \bmod m$、$-p$ の $q_0$ を法とする位数 $o_0$ が奇数で小さい。`IsExceptional`）では、$-p^{o_0}$ が a-place なので衝突が系統的に起きる。そこで、$p$ の上の印を付けた素点での整にスケールしたヘッケ作用素を源の形式に $m$ 回掛けて、整除性を取り戻す（`gaugeLe_restrictedChain_of_isFullMark`）。
- その代わりに源の格子の指数（colength）を失う。この損失が小さいことを示すのが辺のヘッケ作用素の単因子の定理（`FrobeniusCycle.elementary_divisors`、New/UpperBound/ElementaryDivisors/

ElementaryDivisorTheorem.lean）で、格子とその辺の上の関数、フロベニウスの巡回、剰余体の上の多項式の数え上げ（Stepanov、ガウスのフィルトレーション、Pieri 錐）を使う。

- 失った分は誤差 $\mathrm{err}_p$ になり、$\sum_p \mathrm{err}_p \log p \le f a (\log b)^3$（`exists_err_gaugeLe_compositeLift`）。**有限体の上の数え上げは、主項ではなく誤差を抑える部品**。

## まとめ：rem はどこで入るか

| | a-place（$\tau \in \Phi_a$、長い行 $a$） | ほかの行（重さ $\kappa(\tau)$） |
|---|---|---|
| アルキメデス的な大きさ | $m\, s_{\mathrm{main}}$（$N$ で調整した後） | $mk\, s_\infty(\kappa(\tau))$ |
| $p$ 進の整除性（$c_B$ で割る分） | $m\, s_{\mathrm{fin}}(a,\tau)$ | $mk\, s_{\mathrm{fin}}(\kappa(\tau),\tau)$ |
| 差（長さの 2 乗の対数への寄与） | $-m\big(s_{\mathrm{fin}}(a,\tau) - s_{\mathrm{main}}\big)$ | $mk\big(s_\infty - s_{\mathrm{fin}}\big)(\kappa(\tau))$ |
| 和 | $-m\,\mathrm{rem}$ | main |

ほかの行の差の和が主項 main で、これは下界（定理 7）にも同じ形で現れて消える。a-place の差の和が $-m\,\mathrm{rem}$ で、**a-place で実際に得られる整除性（素数の和）が、その期待値より大きいほど形式は短い**。素数の和は $\lambda(n) = \Lambda(n)(1 - \chi_K(n))$ の重み付きの和なので、ここで誤差項 $R_q(x)$ が入る（前の文書の補題 11）。

**解釈**（推測を含む）：高い階数の微分の大きさ、ルジャンドル型の整除性、積公式の組み合わせは、超越数論の補助関数の議論に似ている。

## 上界の中で rem が関わる議論の流れ

上の表のとおり、rem は a-place の長い行（節「言葉：a-place と長い行」）からだけ出る。

$$\mathrm{rem} = \sum_{\tau \in \Phi_a} \big(s_{\mathrm{fin}}(a,\tau) - s_{\mathrm{main}}\big)$$

（grh `totalRemainder`、New/Reduction/PrimeSums.lean:73。compact `Data.remainder`、Endgame/ShortAndEnough.lean:42。同じ定義）。$s_{\mathrm{fin}}(a,\tau)$ は長い行で**実際に得られる**整除性、$s_{\mathrm{main}}$ はその**期待値**。上界の証明は、長い行を二つの側から評価し、その食い違いとして rem を残す。

1. **大きさの側（期待値だけを使う）。**長い行は大きさ $s_\infty(a)$ を持つ（$a$ 階の jet）。レベル $N$ は、超過 $m(s_\infty(a) - s_{\mathrm{main}})$ をちょうど打ち消すように取ってあり、$Y_m$ への制限で $a \log N$ だけ得をする。

   $$\#\Phi_a\big(m(s_\infty(a) - s_{\mathrm{main}}) - a\log N\big) \le 32\, f a \log b.$$

   ここでは素数の実際の分布は入らない。$N$ の選び方は期待値 $s_{\mathrm{main}}$ だけで決まる。（grh `card_aPlaces_mul_excess_le`、`jetSize_sub_mainPrimeSum_le`、`weylNormSq_restrictToY_le`。compact `Data.heightPerRow_le`。compact の Main.lean の注釈：“the level $N$ pays the excess of the $m$ lifts”。）
2. **整除性の側（実際の素数を使う）。**分解しない素数 $p < x_1$ ごとに、合成持ち上げが $p^{\mathrm{gain}_p}$ でほぼ割り切れることを示す。$\mathrm{gain}_p$ の a-place の部分 $m\sum_{\tau\in\Phi_a} s_p(a,\tau)$ が長い行の整除性で、$2\log p$ を掛けて $p$ について足すと $m\sum_{\tau\in\Phi_a} s_{\mathrm{fin}}(a,\tau)$ になる（`two_mul_sum_gain_mul_log`）。整除性の予測は相手の素点 $\tau' = (-p^e)\tau$ の行で決まり、

- 相手が a-place でなければ、相手には長い行が無く（行の長さは重さ程度：b-place なら $b$、ほかなら $a/x_1$）、数式どおりの整除性 $(a/p^e - \kappa(\tau'))_+$ が出る。相手が b-place の場合が、rem の中の $R_{q_0}(x)$ を作る（節「rem が誤差項になる仕組み」）。
- 相手も a-place なら**衝突**で、相手の長い行のせいで整除性が失われる（`IsCollision` は「$\tau$ と $\tau'$ がどちらも a-place」と定義されている）。

衝突の扱いは二通り。

- 普通の素数：衝突は大きな $e$ でしか起きず、損失 $\mathrm{loss}_p = fa(\log b)^2/p$ に収まる（grh `IsWeakChainDatum.gaugeLe_restrictedChain_collisionSum`。compact `Data.mul_collisionSum_le_loss`、`Data.IsGoodDatum.gaugeLe_collisionSum`）。
- 例外的な素数（$p$ が惰性、$p \not\equiv \pm 1 \bmod m$、$-p$ の位数 $o_0$ が奇数で小さい。compact では `IsServed`）：小さい $e = o_0$ で衝突が系統的に起きる。印を付けた素点のヘッケ作用素を源の形式に掛けて整除性を取り戻し、代わりに源の格子の指数を失う。その損失を、ヘッケ作用素の単因子の評価で抑える（grh `gaugeLe_restrictedChain_of_isFullMark`、`FrobeniusCycle.elementary_divisors`。compact `Data.IsGoodDatum.gaugeLe_Bmu_of_isMarked`、New/TwistedHecke）。

失った分は誤差 $\mathrm{err}_p$ で、$\sum_p \mathrm{err}_p \log p \le fa(\log b)^3$（grh `exists_err_gaugeLe_compositeLift`。compact `Data.exists_indexDvd_Bmu_divisible`）。

3. **打ち消し。** 合成持ち上げを $c_B = \prod_\ell \ell^{-g_\ell}$ で割っても整のままで、アルキメデス的な大きさは $2\sum g_\ell \log \ell$ だけ減る。1. の大きさから 2. の整除性を引くと、ほかの行からは main、長い行からは
$$m \sum_{\tau \in \Phi_a} \big(s_{\mathrm{main}} - s_{\mathrm{fin}}(a,\tau)\big) = -m \,\mathrm{rem}$$
が残る（grh `mainAmount_sub_add_two_mul_sum_gain`、`span_short_integralRamified_eq_top`。compact `Data.weylNormSq_Bmu_le`、`Data.short_forms`）。
4. **結論。** 下界（定理 7）と比べると main が消え、$m\,\mathrm{rem} \le fa(\log b)^5$（`star_inequality`、両版）。

**■依存グラフで確かめたこと（両版）。**

- 上の 1.–3. の宣言は、どれも上界の閉包に入り、下界の閉包には一つも入らない。
- rem を誤差項 $R_q$ で書く恒等式（grh `totalRemainder_eq`、compact `Data.remainder_eq`、次の節）は、主不等式の閉包に入らない。主不等式の中では、rem は最後まで「素数の和 − 期待値」のままで、$R_q$ への言い換えは主不等式の後（前の文書）で使う。
- 例外的な素数の枝を除くと、上界の閉包の New の宣言のうち grh で 4,054 のうち 615（うち 477 が UpperBound/ElementaryDivisors）、compact で 1,634 のうち 107（ほとんど TwistedHecke）が消える。つまり、その枝だけが使う。

（道具は study/tools/rem_sites.py、結果は study/data/rem-sites.md。）

**注意 21** (rem に関わる数学の中心)**. 解釈**（推測を含む）：1. と 3. は数の帳簿合わせで、実質的な数学は 2. の**長い行の整除性を、数式で決めた $s_{\mathrm{fin}}(a,\tau)$ どおりに、ほぼ損失なく得ること**にある。衝突（a-place どうしが $-p^e$ で移り合うこと）で失う分を誤差の予算 $fa(\log b)^3$ に収めないと、rem の評価の精度が保てない。例外的な素数のヘッケ作用素と単因子の議論（上界の閉包のかなりの部分）は、

そのためにあると思われる。

## rem が誤差項になる仕組み

rem を誤差項 $R_q$ で書く恒等式は、データの素点の類と重さを、jet の整除性の勘定に誤差項がちょうど現れるように選んであることから出る。grh の Reduction/PrimeSums.lean と compact の Endgame/ShortAndEnough.lean で、同じ形の証明だった（compact では a-place を tops、b-place を thick、$q_0$ を $N_0$ と呼ぶ）。

素点の類（a-place は 1、b-place は $-1 \bmod q_0$）と重さ（b-place で $b = a/x$、ほかで $a/x_1$）は、節「言葉：a-place と長い行」の定義のとおり。

**補題 22** (相手が b-place になる条件)**.** $-\nu\tau$ が *b-place* のとき、$\tau$ が *a-place* であることと $\nu \equiv 1 \pmod{q_0}$ は同値。したがって $\tau$ が *a-place* を動くとき、$-\nu\tau$ が *b-place* になる $\tau$ の数は、$\nu \equiv 1 \pmod{q_0}$ なら $\#\Phi_b$、そうでなければ 0。

Lean（New/Reduction/PrimeSums.lean:89,101(grh)）：

```
lemma mem_aPlaces_iff_of_mul_mem_bPlaces {n : ℕ} {τ : D.Φ}
    (h τ : D.placeOfInt (-n) * τ ∈ D.bPlaces) :
    τ ∈ D.aPlaces ↔ (n : ZMod P.q₀) = 1 := by
lemma card_filter_mem_bPlaces (n : ℕ) :
    #{τ ∈ D.aPlaces | D.placeOfInt (-n) * τ ∈ D.bPlaces} =
      if (n : ZMod P.q₀) = 1 then #D.bPlaces else 0 := by
```

**補題 23** (一つの $\nu$ の寄与)**.**

$$\sum_{\tau\in\Phi_a} \Lambda_K(\nu)\big(a/\nu-\kappa(-\nu\tau)\big)_+ = \#\Phi_a\,\Lambda_K(\nu)\big(a/\nu-a/x_1\big)_+ + \#\Phi_b\,\lambda_{q_0}(\nu)\Big(\big(a/\nu-a/x\big)_+ - \big(a/\nu-a/x_1\big)_+\Big).$$

ここで $\Lambda_K(\nu) = \Lambda(\nu)(1-\chi_K(\nu))$、$\lambda_{q_0}$ はそれを $\nu \equiv 1 \pmod{q_0}$ に制限したもの。

Lean（New/Reduction/PrimeSums.lean:114(grh)）：

```
lemma sum_aPlaces_lambdaKResidueClass_mul_posPart (n : ℕ) :
    ∑ τ ∈ D.aPlaces, lambdaKResidueClass P.d 1 n * (D.a / n - D.weight (D.placeOfInt (-n) * τ) :
    ↪ ℝ)⁺
      =
      #D.aPlaces * (lambdaKResidueClass P.d 1 n * (D.a / n - D.a / D.x₁ : ℝ)⁺) +
        #D.bPlaces * (lambdaKResidueClass P.d P.q₀ n * (D.a / n - D.a / D.x : ℝ)⁺ -
          lambdaKResidueClass P.d P.q₀ n * (D.a / n - D.a / D.x₁ : ℝ)⁺) := by
```

**補題 24** (切った和は誤差項)**.** $0 < z \le A$（$A$ は整数）のとき、$\sum_{n\le A,\ n\equiv 1(q)} \Lambda_K(n)(A/n - A/z)_+ = A\big(R_q(z) + \log z/\varphi(q) + c_q\big)$。

Lean（New/Reduction/PrimeSums.lean:45(grh)）：

```
lemma sum_lambdaKResidueClass_mul_posPart [NeZero q] (A : ℕ) {z : ℝ} (hz : 0 < z) (hzA : z ≤ A) :
    ∑ n ∈ Icc 1 A, lambdaKResidueClass d q n * (A / n - A / z : ℝ)⁺ =
      A * (primeRemainder d q z + log z / q.totient + (logDerivMean d q 1).re) := by
```

**■組み立て。** $s_{\mathrm{fin}}(a,\tau)$ を a-place で足し、$\nu$ ごとに上の補題で分け、切った和を誤差項に書き換えると、

$$\sum_{\tau\in\Phi_a} s_{\mathrm{fin}}(a,\tau) = a\Big(\#\Phi_b\big(R_{q_0}(x)-R_{q_0}(x_1)\big)+\#\Phi_a R_1(x_1)\Big)+a\Big(\#\Phi_a(\log x_1+c_1)+\#\Phi_b\,\tfrac{\log(x/x_1)}{\varphi(q_0)}\Big)$$

（`sum_aPlaces_primeSum`、177 行の前）。後ろの主要部はちょうど $\#\Phi_a\, s_{\mathrm{main}}$ に等しく（`card_aPlaces_mul_mainPrimeSum`。重さの対数の平均の計算 `sum_log_weight` を使う）、差が

$$\mathrm{rem} = a\Big(\#\Phi_b\big(R_{q_0}(x)-R_{q_0}(x_1)\big)+\#\Phi_a\, R_1(x_1)\Big)$$

（grh `Data.totalRemainder_eq`、PrimeSums.lean:177。compact `Data.remainder_eq`、Endgame/ShortAndEnough.lean:86。compact の注釈：「tops を動かすと、$\nu\equiv 1 \bmod N_0$ のときだけ $-\nu\tau$ がどの thick にも当たる」）。

**注意 25** (誤差項の各部分の出どころ)**. 解釈**（推測を含む）：

- 重み $(1/n-1/x)$：a-place の長い行（長さ $a$）と、相手の b-place の行（長さ $b=a/x$）の比 $x=a/b$。整除性の勘定 $(a/\nu-\kappa(-\nu\tau))_+$ の「相手の重さの分だけ失う」が、ちょうどこの切り方になる。
- 法 $q_0$ で 1 の類という条件：a-place（類 1）と b-place（類 $-1$）の組み合わせ。
- 係数 $1-\chi_K(n)$：分解しない素数でだけ整除性が出ること（CM 曲線のフロベニウス合同）。
- 二つ目の切り口 $x_1$：相手が b-place でない場合の切り方で、$R_1(x_1)$ と $R_{q_0}(x_1)$ を作る。$x_1$ はとても大きいので、素数定理でほぼ 0（前の文書）。

つまり、測りたい誤差項 $R_{q_0}(x)$ が整除性の勘定にちょうど現れるように、素点の類（$\pm1 \bmod q_0$）と重さ（$a$、$b=a/x$、$a/x_1$）を選んでいる。b-place がまばらな集合でなければならない理由（GUIDE は Behrend の構成を挙げる）は確かめていない。

## 定理 B の中身（ファイルの注釈から）

定理 B は、少数の平行移動 $s\mathfrak{p}$ が目標をほぼ張ることを、二次モーメントから示す。証明は読んでおらず、以下はファイル冒頭の注釈と題による。

1. **抽象的な補題**（`isSpread_of_second_moment`、New/Spanning/SecondMoment/FewTranslates.lean:320）：有限群がユニタリに作用し、$e_0\mathcal{P}$ が平均でほぼ等長で、$\sum_s \|\mathcal{P}^* s\mathcal{P}\|^2$（ヒルベルト – シュミット）がコーシー – シュワルツの下限に近ければ、少数の平行移動で埋まる。線形代数（Welch の評価、貪欲法）。
2. **二次モーメントの展開**（Spanning/Unfolding）：ポアンカレ級数を展開すると、二次モーメントはユニタリ群の有理点 $\gamma$（**項**）の和になる。項はブロック $(c,s,c')$（二つの類と剰余体の上の群の元）ごとにまとまり、各項の**振幅**は局所の量の積：実素点ではベッセル関数（離散系列の係数をベッセル部分群で積分したもの）の積分、有限素点では軌道積分（クルースターマン和、MainTerm/KloostermanSum）。**解釈**（推測を含む）：相対跡公式（Kuznetsov 型）の幾何側。
3. **主項**（Spanning/MainTerm）：開胞（big cell）の項。ジーゲルの質量公式による上界、片側のポアソン和、篩。主項の大きさは $(\dim \mathrm{src})^2/$(形式的次数 $\times$ 質量)（`mainSecondMoment`）。

4. **残りの項**（Spanning/RemainingTerms、Spanning/Frames）：近い項の数え上げ。項ごとの枠（frame）と共通の格子、その判別式、ジーゲルの補題、余階数ごとの格子の和、Schur テスト。局所の評価は、二次曲面の上のプランシュレル、ハール測度、殻ごとの積分。
5. **付録**（Appendix/DiscreteSeries）：離散系列の係数の周期の下界を、ラプラスの方法で。

表現論（実素点の離散系列、有限素点の $\mathrm{GL}_r$ の Green の指標と良い射影 $e_0$）は対象と規格化を与える。評価の大部分は局所の積分の評価と格子の数え上げ。

### 上界が使う既知の理論

上界が使う既知の理論（Lib）は、主に、ヴェイユ表現（構成と模型、双対対、テータ持ち上げ、ベッセル周期）、アデールのユニタリ群の保型形式（ポアンカレ級数、トレースの比較）、$U(p,q)$ の離散系列（ベッセル関数、ハール測度、局所テータ対応）、$\mathrm{GL}(n)$ の多項式表現、CM 楕円曲線のテータ関数と形式群、素点と局所体、有限体の上の $\mathrm{GL}_n$ の表現、局所密度とジーゲルの質量公式（フォルダごとの数は HTML の節「文書から移したコードの分析」（study/report/index.html））。

## 下界の中身：主項はどこから来るか

定理 7 の証明を、grh（New/Determinant/Twist/LongForms.lean）と compact（New/Endgame/LongForms.lean）の両方で読んだ。主な補題の主張と証明の骨格、部品のファイルの冒頭の注釈による。版を書かない記述は両方に当てはまる。

### 骨格：積公式とひねり

**■ひねりは格子の定義に入っている。** **ひねり** $\xi$ は、CM 体 $E$ の上の $U(1)$ の重さ 0 の保型指標（反円分的なヘッケ指標）で、法の素点で tame に分岐するもの。$\xi, \xi^2, \dots, \xi^m$ のどれも法の素点で分岐したままのものを $m$ **重のひねり**という（grh・compact とも `MFoldTwist`）。目標の形式 $y$ は、ひねりごとのテータ持ち上げの鎖 $\Theta_\xi$ で定値群 $U(Y_m)$ に送られる。目標の格子では（定義 9）、

- $y$ が $\ell$ で**整**とは、$\ell$ で許されるすべてのひねり（法が $\ell$ と素）で $\Theta_\xi y$ が整であること（grh：`TwistedLattice.integralVectors`、compact：`Data.IndexLe` の「$\vartheta$ prime to $l$」）。
- **余体積**はひねらない $\Theta_1$ だけで測る。

**■積公式で下界を出す。** ひねらないグラム行列式 $\mathrm{Gram}(1)$ のアルキメデス的な大きさが余体積 $c_\infty$。これが各 $\ell$ で整であることしか分からなければ、積公式からは $c \geq 0$ しか出ない（普通の格子の「整数は 1 以上」）。そこで各 $\iota : \mathbb{C} \simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ に、$\ell$ で許されるひねり $\xi_\iota$ を一つ選び、

$$\mathrm{Gram}(1) = \mathrm{Gram}(\xi_\iota) \cdot \frac{Z(1)}{Z(\xi_\iota)} \cdot (\text{基底に補う分の因子})$$

と分ける（grh：`covolume_add_index_nonneg` の証明、New/Reduction/Lattices/TwistedLattice.lean）。$\mathrm{Gram}(\xi_\iota)$ は格子の定義により $\iota$ で整（指数 $\delta$ の分を除く）。体積の比 $Z(1)/Z(\xi_\iota)$ の高さが $-d \cdot \mathrm{main}$ 程度まで小さいので、$\mathrm{Gram}(1)$ は各 $\ell$ で主項の分だけ割り切れ、積公式から $c + 2\delta \gtrsim d \cdot \mathrm{main}_\infty$。$\xi_\iota = 1$ を選ぶと比は 1 で、何も得られない。

**解釈**（推測を含む）：ひねりは同じ形式を $\ell$ で測る別の物差しで、ひねった物差しで整なら、ひねらない側の体積は L 値の比の分だけ $\ell$ で小さい。

**■四つの材料。** 定理 C は `covolume_add_index_nonneg` に次の四つを入れる：(1) 族を基底に補う**補助の形式**（grh `exists_span_isAuxiliaryForm_eq_top`、compact `crude_rows`）、(2) **素数ごとのひねり**（grh `exists_isRegularFamily`、compact `exists_isFitFamily`）、(3) **持ち上げの単射性**（grh `injective_lift_targetLattice`）、(4) **体積の比の高さ**（grh `heightLe_chainDeterminant_one_div`、compact `heightLe_volume_ratio_sq`。主項はここから）。

## 主項：体積の比を三段に分ける

**補題 26** (体積の比)**.** ひねりの族 $\xi_\iota$ が小さい比を持ち、$1 \le j \le m$ で一本の持ち上げの比 $Z_j(1)/Z_j(\xi_\iota^j)$ の高さが $d\,(fa(\log b)^4/m - k\cdot\mathrm{dir})$ 以下なら、$Z(1)/Z(\xi_\iota)$ の高さは $d\,(b + fa(\log b)^4 - \mathrm{main})$ 以下。ここで $\mathrm{dir} = \sum_\sigma (s_\infty - s_{\mathrm{fin}})(\kappa(\sigma))$（`directionAmount`）、$\mathrm{main} = mk\cdot\mathrm{dir}$。

Lean（New/Determinant/Twist/LongForms.lean（grh））：

```
lemma heightLe_chainDeterminant_one_div {θ : PrimePadicIso → D.MFoldTwist} (hθ : D.HasSmallRatios
↪  θ)
    (h_single : ∀ j ∈ Icc 1 D.m,
      HeightLe (D.targetDim * (D.f * D.a * D.logB ^ 4 / D.m - D.k * D.directionAmount))
        fun ι : PrimePadicIso ↦ D.liftDeterminant 1 j / D.liftDeterminant (θ ι) j) :
    HeightLe (D.targetDim * (D.b + D.f * D.a * D.logB ^ 4 - D.mainAmount))
      fun ι : PrimePadicIso ↦ D.chainDeterminant (1 : D.MFoldTwist) / D.chainDeterminant (θ ι) :=
      ↪  by
```

compact では `Data.heightLe_volume_ratio_sq`（$\mathfrak{z}(1)^2/\mathfrak{z}(\theta_\iota)^2$ の高さ $\le 2D(2\,\mathrm{budget}\cdot\log b - h_{\mathrm{main}})$）。

**■段 1：鎖を一本ずつに分ける。**

$$\frac{Z(1)}{Z(\xi)} = \big(\text{ヘッケ値の比と } N(Q) \text{ の冪のスカラー}\big)^{-d} \prod_{j=1}^{m} \frac{Z_j(1)}{Z_j(\xi^j)}$$

（grh：`exists_chainDeterminant_one_div_eq`、材料は Determinant/Chain/NormOfChain。compact：`volume_iota_eq_prod_liftVolume`、Rows/RowVolume）。$Z_j$ は $W_j \to V_j$ の一本の持ち上げの体積。

**■段 2：一本の持ち上げ。** 比較作用素 $U_\vartheta$ を作ると、ひねりによらない $C \neq 0$ で

$$Z_j(\vartheta)\cdot\det(\mathrm{pr}\,U_\vartheta) = C\cdot\big(\text{ヘッケ値の積の比}\big)^{d}.$$

$\det(\mathrm{pr}\,U_\vartheta)$ は、$\vartheta = 1$ でアルキメデス的に小さく、$\vartheta = \xi_\iota^j$ で $\iota$ 進に大きすぎない（持ち上げへの射影の分母で抑える。ここで良いひねりを使う）。主項はヘッケ値の比から出る（grh：`heightLe_liftDeterminant_ratio`、New/OneLift/LiftVolumeHeight.lean:729。compact：Rows/LiftVolumeHeight）。

**■段 3：ヘッケ値の比。** ヘッケ値の積は、$k/2$ 個の**主要な組**の L 値の比の 2 乗と、分岐した組の比に分かれる。

**補題 27** (主要な組の比)**.** 良いひねりの族 $\xi_\iota$ と主要な組 $p = (\nu, z)$ について、$p$ の比 $|L(z,(\nu\vartheta)^{-1})|/|L(z,\nu^{-1})|$ の $\vartheta = \xi_\iota^j$ での逆数の族は、高さ $6\,\mathrm{budget} - \mathrm{dir}$ 以下。

Lean（New/OneLift/HeckeValues/TwistedValueHeights.lean:860(grh)）：

```
theorem heightLe_inv_ratio {θ : PrimePadicIso → D.MFoldTwist} (h θ : D.IsRegularFamily θ)
    (j : D.LiftIndex) (p : D.CriticalPair) (hp : p.IsMainPair j) :
    HeightLe (6 * D.denominatorBudget - D.directionAmount) fun ι : PrimePadicIso ↦
      (p.ratio ((θ ι).powTwist j))⁻¹ := by
```

compact では Rows/HeckeValueHeight（「Inverse ratio of twisted Hecke values has height repaying one direction」）。

**■証明の材料（注釈から）。** L 値は、$U(1)$ からのランク 1 のテータ持ち上げのノルムの 2 乗（Rallis の内積公式）で、比は $\|\varphi_1\|^2/\|\varphi\|^2$（$\varphi_1$ はひねらない持ち上げ、$\varphi$ はひねったもの）。

- アルキメデス的：ひねらない $\|\varphi_1\|^2$ の共役の大きさは、$s_\infty$ の和で**等式として**与えられ、下からの評価として使う（節「主項の出どころ：なぜ同じ量が両側に出るか」）。
- $p$ 進：ひねった $\varphi$ と試験形式 $\Xi$ の内積の付値を、**上から** `localPrimeSumTotal`（$s_{\mathrm{fin}}$ の $\ell$ の部分）で抑える（`exists_isTestForm_le_norm_inner_trivialLift`。鋭さの評価、節「主項の出どころ：なぜ同じ量が両側に出るか」）。

$m$ 本の持ち上げ $\times$ $k/2$ 個の組 $\times$ 2 乗で、$mk \cdot \mathrm{dir} = \mathrm{main}$。

**解釈**（推測を含む）：上界では「テータ関数の jet の大きさと整除性」を数え、下界では同じ勘定を「CM 体のヘッケ L 値の大きさと整除性」で行う。CM 体の臨界 L 値をテータ関数の微分の値として書く古典的な関係（Damerell、Katz。注釈は Katz、Prasanna、Coates–Liang–Sujatha を挙げる）が、両側を同じ量 $s_\infty - s_{\mathrm{fin}}$ にしていると思われる。

## 部品（数論幾何でない部分）

どの部品も、テータ対応の明示的な恒等式で、ひねりを変えたときの変化をヘッケ L 値に押し込める種類の議論（両版のフォルダとの対応は HTML の節「文書から移したコードの分析」(study/report/index.html)）。

1. **鎖を分ける**：持ち上げと降下の三角形、正方形の可換性（上がって下がる = 下がって上がる、L 値の因子を除く）、交換恒等式（補空間の階数のテータ積分が定数倍で一致し、定数は L 値。Siegel–Weil 型）、有限環の上の線形代数。
2. **一本の持ち上げ**：比較作用素 $U_\vartheta = \mathrm{glue}_\vartheta \mathrm{glue}_\vartheta^*$（ひねりによらないテータ級数を三回の交換で貼る）。$Q$ の外で整、$\vartheta = 1$ で短い、偽の持ち上げに直交。積が張ること（最大値の点の周りの解析）、偽の持ち上げの周期が消えること（降下の塔）。
3. **ヘッケ値の比**：ランク 1 の持ち上げのノルム = L 値（Rallis）、$s_\infty$ と試験形式の付値。
4. **補助の形式**：二つのユニタリ群の格子の中の経路。曲がり一回 = 正方形一つ（L 値の比を一つ払う）、$m^2$ 回で最初の経路から最後の経路へ。本数 $\le 4d/b^2$ なのでコストは誤差。
5. **まとめ**：積公式。

## 良いひねりと数論幾何

**定義 28** (良いひねりの族)**.** 各 $\iota : \mathbb{C} \simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ に $m$ 重のひねり $\xi_\iota$ を一つ選ぶ族で、(i) $\xi_\iota$ の法は $\ell$ と素、(ii) 分岐した組の L 値の比の逆数の高さが小さい、(iii) $1 \le j \le m$ で $\xi_\iota^j$ での持ち上げへの射影の分母（合同数）の対数の $\ell$ についての和が budget 以内。

Lean（New/Determinant/Twist/FitTwists.lean:229(grh)）：

```
structure IsRegularFamily (θ : PrimePadicIso → D.MFoldTwist) : Prop extends D.HasSmallRatios θ
↪  where
  exists_denominator_bound (j : D.LiftIndex) : ∃ γ : ℕ → ℝ, D.IsDenominatorBound θ j γ
```

Lean（New/Selmer/FitTwists.lean:256(compact)）：

```
structure Data.IsFitFamily (θ : PrimePadicIso → D.MFoldTwist) where
  coprime ι : Nat.Coprime ι.1.1 (θ ι).levelNorm
  denominator_le j : ∃ γ, (∀ T : Finset ℕ, (∀ l ∈ T, l.Prime) → T.sum γ ≤ D.B₀) ∧ ∀ ι,
  ↪  DenominatorLe
    ι.2 _ D.e₀ (D.goodLift ((θ ι).powTwist j) j).range (γ ι.1) ∧ ∀ p : D.Pair, ∀ H : p.IsRankOne
    ↪  j,
    DenominatorLe ι.2 _ (tupleIdem _ fun _ ↦
    .X - 1) (ℂ • (p.lValueData H.1 ((θ ι).powTwist j)).trivialLift) (γ ι.1)
  height_le j (p : D.Pair) s : p.IsRamified → HeightLe (D.x ^ 999) fun ι ↦
    (p.ratio ((θ ι).powTwist j) s)⁻¹
```

違いは分岐した組の許容量（grh は $x_1$、compact は $x^{999}$）。存在定理は grh `exists_isRegularFamily`（Congruences/FitTwistsExist）、compact `exists_isFitFamily`（Selmer/FitTwistsExist）。

**■なぜガロア表現か（注釈とファイルの題から）。**

1. **Ribet の方法**：ひねった持ち上げとほかの形式の $\bmod \ell$ の合同から、ガロア表現の拡大の類（Selmer 類）が作れる。Selmer 群が短ければ合同数は小さい。そのために、保型形式に付くガロア表現（共役自己双対）と、$\ell$ でのクリスタリンの条件（$p$ 進ホッジ）が要る（grh：Congruences/FirstOrder、GaloisRepresentations、LocalLoss、Lifting）。
2. **ひねりで Selmer 群を小さくする**：新しい素数で分岐する反円分的なひねりで、$\xi, \dots, \xi^m$ のどれでも Selmer 群を短くし、L 値の比も $\ell$ でほとんど割り切れないようにする（Selmer/TwistingTheorem。注釈は Mazur–Rubin、Kriz–Nordentoft、Hida を挙げる）。

**解釈**（推測を含む）：L 値・合同数・Selmer 群の結びつきは Bloch–Kato 型。主項は L 値の比から出て、合同の分母がその得を食わないことを保証するのがガロア表現の役割。

**■数論幾何の塔。** 使う既知の理論は、ガロア表現（定値ユニタリ群の保型形式にガロア表現を付ける、局所大域整合性）、志村多様体（整モデル、Eichler–Shimura、固有系でコホモロジーからガロア表現を切り出す）、スキームのコホモロジー（エタール、底変換）、$p$ 進比較定理、$p$ 進ホッジ理論（周期環、クリスタリン表現、Kisin 加群）。**解釈**（推測を含む）：これらは一つの塔で、志村多様体のコホモロジーから固有形式のガロア表現を切り出し、それが $\ell$ でクリスタリンであることを示すための土台。ガロアコホモロジーは類体論の側にある。

**■どこで使うか。** grh では、これらの理論は良いひねりの存在を示すためにだけ使う（良いひねりの存在を除くと、一般的な補題しか届かない）。compact では、ラベルの剛性（B と C のトレースの比較）にも使う。類体論（素点、ヘッケ指標）と有限体の上の $\mathrm{GL}_n$ の表現（ラベル）は、両版とも良いひねりの外でも使う（集計は HTML の節「文書から移したコードの分析」（study/report/index.html））。

### 上界と下界の対比

上界（節「上界の中身：長さはどこから来るか」）と下界を同じ観点で並べる。

| 観点 | 上界（A） | 下界（C） |
|---|---|---|
| 測る対象 | 合成持ち上げの値（テータ関数の jet） | ランク 1 の持ち上げのノルム = ヘッケ L 値 |
| アルキメデス的 | 大きさ $\le s_\infty$（jet のコーシー型の評価） | 大きさ $\ge s_\infty - 4f$（ひねらない L 値の大きさの等式） |
| $p$ 進 | 付値 $\ge s_{\mathrm{fin}}$（jet の整除性） | 付値 $\le s_{\mathrm{fin}}$（鋭さ：試験形式との内積） |
| 結果 | 長さ $\approx \mathrm{main} - m\,\mathrm{rem}$ | 余体積 $\gtrsim d \cdot \mathrm{main}$ |
| ひねりへの依存の処理 | シーソー恒等式 | 交換恒等式、正方形、Rallis の内積公式 |
| 誤差の制御 | 例外的な素数での単因子（有限体の上の数え上げ） | 良いひねり（合同、ガロア表現、Selmer 群） |

両側に同じ形の $s_\infty - s_{\mathrm{fin}}$ が現れて main が消える。上界では a-place の長い行で実際の素数の和が使われ、rem が残る。

## 主項の出どころ：なぜ同じ量が両側に出るか

上界（節「上界の中身：長さはどこから来るか」）と下界（節「下界の中身：主項はどこから来るか」）は、別々の対象（合成持ち上げの値と、ヘッケ L 値）について述べているのに、同じ量 main $= mk \sum_\sigma (s_\infty - s_{\mathrm{fin}})(\kappa(\sigma))$ が現れる。その出どころを、両方の版の Lean のコードで調べた。この節が、主不等式の証明のアイディアの中心と思われる。

### 二つの導出の合流点

上界で main が出る補題（補題 16、補題 19）と、下界で main が出る補題（補題 27）の依存を比べると、両版とも、二つの導出は次の三つの部品で合流する（調べ方と表は HTML の節「文書から移したコードの分析」（study/report/index.html））：

1. jet のアルキメデス的な大きさの評価（コーシー型。grh `sqrt_weylNormSq_schurJet_le_of_isVacuumCombination`）。
2. 標準データのテータ持ち上げは付値を上げる（grh `omega_mem_raises_of_schurJet_le`）。
3. 分解しない素数でのテータ積の正規形（フロベニウス合同。grh `exists_hasNormalForm`）。

つまり両側とも、**$K$ による CM を持つ楕円曲線のテータ関数の積のテイラー係数（jet）**の、大きさと整除性を数えている。

## 下界の主要な組の比：四つの因子

補題 27 の証明（grh：TwistedValueHeights.lean:860、compact：Rows/HeckeValueHeight.lean:154）は、逆数の比を四つの因子に分けて高さを足す。

$$\frac{L(z,\nu^{-1})}{L(z,(\nu\vartheta)^{-1})} = N(Q)^{*}\cdot \underbrace{\|\varphi_1\|^{2}}_{(1)}\cdot \underbrace{\langle \mathrm{pr}\,\Xi, \mathrm{pr}\,\Xi'\rangle}_{(2)}\cdot \underbrace{\rho^{-2}}_{(3)}\cdot \underbrace{\frac{\rho^{2}}{\langle \Xi,\varphi\rangle\langle\varphi,\Xi'\rangle}}_{(4)}$$

ここで $\varphi_1$、$\varphi$ はひねらない・ひねったランク 1 の持ち上げ、$\Xi,\Xi'$ は $\iota$ とその共役での試験形式、pr は $\varphi$ の直線への射影、$\rho$ は分岐した組の比。$N(Q)$ の冪は整数なので効かない。

| 因子 | 高さ | 何から | 補題（grh ／ compact） |
|---|---|---|---|
| (1) | $\mathrm{budget} - \sum_\tau s_\infty(\kappa(\tau))$ | ひねらない L 値は**大きい**（大きさの等式） | `heightLe_norm_trivialLift_sq`（両版） |
| (2) | budget | 合同が少ない（良いひねり） | 良いひねりの分母の条件 |
| (3) | $2x_1$（compact は $2x^{999}$） | 分岐した組の比（良いひねり） | 良いひねりの比の条件 |
| (4) | $2\,\mathrm{budget} + \sum_\tau s_{\mathrm{fin}}(\kappa(\tau),\tau)$ | 内積は $s_{\mathrm{fin}}$ **より多くは割り切れない**（鋭さ） | `exists_isTestForm_le_norm_inner_trivialLift` ／ `depth_indicator_jet` |
| 和 | $6\,\mathrm{budget} - \mathrm{dir}$ | | |

**補題 29** (ひねらない L 値の大きさ)**.** $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/K)$ ごとに定数 $c$ があって、階数 $2z \geq 4$ のどの臨界組 $p=(\nu,z)$ にも、$-4f \leq r$（空の行の組なら $r \leq 4f$ も）を満たす $r$ があり、

$$\log\bigl|\sigma\bigl(\|\varphi_1\|^{2}\bigr)\bigr| = c + r + \sum_{\tau} s_\infty\bigl(\mathrm{negWeight}(\tau) - z\bigr).$$

Lean（New/OneLift/HeckeValues/AlgebraicPartSize.lean:338(grh)）：

```
lemma New.Data.CriticalPair.exists_log_norm_map_norm_sq_trivialLift_eq_add_sum_jetSize
    {P : Parameters} (D : Data P) (n : Type)
    [Fintype n] [DecidableEq n] (σ : Gal(ℂ/K P)) :
    ∃ c : ℝ, ∀ (p : D.CriticalPair) (H : p.HasLiftRank n), ∃ r : ℝ,
      -(4 * D.f) ≤ r ∧
      (p.HasEmptyRow n → r ≤ 4 * D.f) ∧
      log ‖σ (‖ trivialLift H TameChar.one ‖ ^ 2)‖ = c + r + ∑ τ : D.Φ,
        D.jetSize (p.negWeight τ - p.z) := by
```

compact では `Data.Pair.log_norm_map_norm_sq_trivialLift`（Exchange/AlgebraicPartConjugates.lean:52。注釈：「factorials over periods」）。定数 $c$ は空の行の組（$s_\infty = 0$）と比べて消す。注釈によれば、共役は共役な指標の持ち上げのノルムで、それは L 値の明示的な倍。階乗はヴェイユ加群のグラム行列のフック数（`hookNumber_eq_prod_factorial`）から出る。

**定理 30** (鋭さ)**.** 重さ $\kappa$ と $\kappa + x^{42}$ の間の次数 $l$ について、共役が小さい $t \neq 0$ が一つあって、どの素数 $p$ と埋め込み $\iota_p$ でも、ある指示関数データのテイラー係数（$\prod l!$ と真空の倍率を掛けたもの）の付値は $S_p + v(t)$ 以下。$S_p$ は `localPrimeSumTotal`（$s_{\mathrm{fin}}$ の $p$ の部分）。

Lean（New/Derivatives/Sharpness/BoundAttained.lean:381(grh)）：

```
theorem exists_rpow_neg_localPrimeSumTotal_le_norm_coeff {P : Parameters} (D : Data P) (l : D.Φ →
↪  ℕ)
    (hl : ∀ τ : D.Φ, (D.weight τ : ℝ) ≤ l τ ∧ l τ ≤ (D.weight τ : ℝ) + D.x ^ 42) :
    ∃ t : ℂ, t ≠ 0 ∧
      (∀ σ : ℂ ≃+* ℂ, ‖σ t‖ ≤ exp (D.f * D.m / D.k * D.b)) ∧
      ∀ m : Modulus D.E, m.ideal = .span {D.piM} → ∀ (p : ℕ) [Fact p.Prime] [PadicPlace p],
        ∃ (γ : D.Φ × Fin 12 × Unit →₀ ℕ) (y₀ : Matrix (Fin 12) Unit m.ResidueRing),
          (∀ τ : D.Φ, ∑ b : Fin 12, γ (τ, b, ()) = l τ) ∧
          p ^ (-D.localPrimeSumTotal p) ≤ ‖ι ₚ
            (P.vacuumScale D.towerExp ^ 12 / t * (∏ τ : D.Φ, (l τ)!) *
```

compact では Rows/GluedFormTheta（depth_indicator_jet。注釈：「Some jet is no more divisible than predicted ... this upper bound on valuations is needed to divide out the Hecke values」）。注釈は、一本の曲線での鋭さ（傾き $p/(p^2-1)$）を既知として Bannai–Kobayashi などを挙げる。鋭さの評価には、両版とも下界からしか届かない（上界の閉包に入らないことを確かめた）。

## 結論：同じ jet を反対向きに抑える

上界と下界が使う評価を、向きをそろえて並べる。

| 評価 | 上界（A） | 下界（C） |
|---|---|---|
| 対象 | 合成持ち上げの値 = テータ関数の jet の結合（シーソーで） | ひねらない・ひねった L 値 = ランク 1 の持ち上げのノルム。その核の値が jet |
| アルキメデス的 | **上から**：jet の大きさ $\le s_\infty$（①） | **下から**：ひねらない L 値の大きさ $= s_\infty + O(f)$（補題 29） |
| $p$ 進 | **下から**：付値 $\ge s_{\mathrm{fin}}$（③ と Derivatives/Vacuum/Divisibility。compact は Columns/LocalStatement） | **上から**：付値 $\le s_{\mathrm{fin}}$（③ と鋭さ、定理 30） |
| 結果 | 長さ $\le \mathrm{main} - m\,\mathrm{rem} +$ 誤差 | 余体積 $\ge d \cdot \mathrm{main} -$ 誤差 |

**注意 31** (証明のアイディアについて)**. 解釈**（推測を含む）：

1. **同じものを測っている。**上界も下界も、CM テータ関数の jet の「大きさ $s_\infty$ と整除性 $s_{\mathrm{fin}}$」を数える。下界で jet が出るのは、ヘッケ指標の L 値がランク 1 のテータ持ち上げのノルムで、その値がテータ関数の微分だから（CM 体の臨界 L 値の Damerell・Katz 型の性質）。
2. **二つの評価が両方とも鋭い。**上界には「大きさ $\le s_\infty$、付値 $\ge s_{\mathrm{fin}}$」、下界には逆向きの「大きさ $\ge s_\infty$、付値 $\le s_{\mathrm{fin}}$」が要る。アルキメデス的な側は等式（階乗と周期）、$p$ 進の側はフロベニウス合同による整除性が鋭いこと、で両向きがそろう。だから main がちょうど消える。
3. **非対称なのは a-place の長い行だけ。**上界の合成持ち上げにだけ長さ $a$ の行があり、そこではレベル $N$ で大きさを期待値 $s_{\mathrm{main}}$ にそろえるので、実際の整除性との差 rem が残る（節「上界の中身：長さはどこから来るか」のまとめの表）。下界にはこの行が無いので rem が出ない。

「誤差項を含む上界の不等式に謎の項 main が付き、その謎の項が下界で別の仕方で説明される」という現象は、二つの不等式が同じ jet の大きさと整除性を反対向きに測っていて、その評価がどちらも鋭いこと、に帰着する。

## jet とは

GUIDE の用語集では、jet は「$P(\partial)F(0)$、テータ関数のテイラー係数」（`jet`、`schurJet`）。ヴェイユ表現の**真空**（標準的なシュワルツ関数）の平行移動から作ったテータ関数は、$K$ による CM を持つ楕円曲線のテータ関数の積として書ける（grh：Derivatives/Vacuum/StandardDataProducts「Standard data as products of theta functions of the curve」）。その原点でのテイラー係数（多項式 $P$ による微分を 0 で評価したもの）が jet。

## jet を調べる道具は共有されている

正規形、真空の整数性、CM 体と素点、jet のアルキメデス的な評価は、上界と下界で同じものを使う。分かれるのは整除性の評価の向きだけで、上界は「少なくともこれだけ割り切れる」（下からの評価）、下界は「これ以上は割り切れない」（鋭さ）を使う（両版の集計は HTML の節「文書から移したコードの分析」（study/report/index.html））。

## jet に結びつける手続きは違う

上界も下界も、直接の対象は jet ではない。上界の対象は目標の形式を持ち上げた値の大きさ $\|\Theta_1(s\mathfrak{p}\varphi)\|_\sigma^2$ と整数性、下界の対象は鎖の体積の比 $Z(1)/Z(\xi)$（$Z(\xi)=\det(\Theta_\xi^*\Theta_\xi)$）。大きさ $s_\infty$ と整除性 $s_{\mathrm{fin}}$ がはっきり評価できるのは jet だけなので、恒等式で対象を jet で書ける量に書き換える。

- **上界**：(1) $\Theta_1(\mathcal{P}\varphi)$ はポアンカレ級数（無限和）を持ち上げの鎖で送ったもので、直接は評価できない。(2) **シーソー恒等式**（定理 33）で、定値空間の鎖の有限結合（合成持ち上げ）に書き換える。(3) 各持ち上げの核は、真空の平行移動にヴェイユ表現を作用させたテータ関数で、その値を座標で読むと jet（`jetMap`、`sqrt_weylNormSq_jetMap_le`）。(4) 合成持ち上げの値は jet の積の和。
- **下界**：(1) **交換恒等式と正方形の可換性**で、鎖の体積を一本ずつの持ち上げの体積 $Z_j$ の積に分ける。ひねりへの依存はヘッケ L 値の比として出る。(2) **比較作用素**で、$Z_j$ のひねりへの依存もヘッケ L 値の積に押し込める。(3) ヘッケ L 値は **Rallis の内積公式**で、$U(1)$ からのランク 1 のテータ持ち上げのノルムの 2 乗。(4) ひねらない側のノルムは階乗と周期の等式で $s_\infty$（補題 29）。ひねった側と試験形式の内積は jet（指示関数データのテイラー係数）で書け、付値は鋭さで $s_{\mathrm{fin}}$ 以下（定理 30）。

（それぞれの側だけで使う部分の集計は HTML の節「文書から移したコードの分析」（study/report/index.html）。）

**注意 32** (まとめ)**. 解釈**（推測を含む）：

1. **測る量は同じ**：CM テータ関数の jet の大きさ $s_\infty$ と整除性 $s_{\mathrm{fin}}$。
2. **jet を調べる道具もほぼ同じ**：違いは整除性の評価の向き（Divisibility と Sharpness）だけ。
3. **jet に結びつける手続きが違う**：上界は「形式の値 → シーソー → jet」、下界は「体積 → 交換恒等式 → L 値 → Rallis → jet」。どちらもテータ対応の恒等式だが種類が違う。数論幾何（良いひねり）は、下界のこの手続きの途中で、合同の分母を抑えるためだけに入る。

上界と下界の見かけの違いの大部分は「どうやって jet にたどり着くか」の違いで、たどり着いた後の評価は向きが逆なだけで同じ道具を使う。

**■確かめていないこと。** 鋭さの定理の証明（Derivatives/Sharpness）、大きさの等式の証明（フック数と周期）、因子 (2) の分母の評価の中身。grh の下界の閉包に、定理 B で使うポアンカレ級数の部品（Spanning/Unfolding など）が入る理由（補助の形式か次元の等式からと思われる）。

## 群と道筋：どちらもデータで別の群に移る

上界も下界も、目標の形式 $y$ そのものではなく、テータの鎖で**定値群に移したもの** $\Theta y$ について述べる（格子の定義がそうなっている）。目標の形式の空間は「添字の空間」で、測るのはいつも移した先。

**■空間（GUIDE による）。** $X_0$：定値エルミート空間（階数 $k$）。$Y_0$：$X_0$ に双曲平面を $\varrho$ 個とノルム $-N$ の直線を足したもの（**不定値**、階数 $r$）。$X_j, Y_j$（$j = 1, \dots, m$）：鎖の途中。$Y_m$ は $X_m$ の中の**定値**の部分空間。

**定理 33** (シーソー恒等式)**.** $t$ を $X_0$ 上の形式の値の線形形式、$g$ を $U(Y_0)$ のアルキメデス的な点とする。0 でない数 $c$ があって、どのひねり $\vartheta$ にも鎖のデータ $\Psi$ があり、すべての分岐した源の形式 $\varphi$ について

$$\Theta^{\mathrm{lower}}_{\vartheta}(\mathcal{P}\varphi) = c \cdot \mathrm{compositeLift}^{\Psi}_{\vartheta}(\varphi).$$

ここで $\mathcal{P}$ は $X_0$ 上の形式から $Y_0$ 上の形式へのポアンカレ写像、右辺は定値空間の鎖 $X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_m$（データ $\Psi$）を $Y_m$ に制限したもの。

Lean（New/UpperBound/Seesaw/SeesawIdentity.lean:624）：

```
theorem seesaw_identity {P : Parameters} {D : Data P}
    (t : (WeylIndex (D.X 0) D.columnCount → ℂ) →ₗ[ℂ] ℂ) (g : GInf D.E (D.signsY 0)) :
    ∃ c : ℂˣ, ∀ ϑ : D.Twist, ∃ Ψ : D.Translations →₀ ℂ, IsChainDatum ϑ Ψ ∧
      ∀ φ : D.ramifiedSourceForms,
        lowerChain ϑ (D.poincareAt g t φ) = (c : ℂ) •  compositeLift ϑ Ψ φ := by
```

| | 移す先 | 何を比べるか |
|---|---|---|
| 上界 | 源 $U(X_0) \xrightarrow{\mathcal{P}}$ 目標 $U(Y_0) \xrightarrow{\Theta_1}$ 定値 $U(Y_m)$<br>シーソーで「定値 $X_0 \to \cdots \to X_m$ の合成」に書き換え | 合成持ち上げの大きさ（短い形式） |
| 下界 | 目標 $U(Y_0) \xrightarrow{\Theta_1,\ \Theta_\vartheta}$ 定値 $U(Y_m)$ | ひねり無しとひねり有りの体積の比 |

**解釈**（推測を含む）：どちらも、定値群に移せば値が有限個で、整の構造と内積が素朴に扱えることを使う。素数の和 $s_{\mathrm{fin}}$（微分の整除性）が上界に入るのは、合成持ち上げの評価の中と思われる（GUIDE：$s_{\mathrm{fin}}$ の $p$ の部分を $2\log p$ で割ったものは、合成持ち上げが $p$ で割り切れるべき指数）。

## 確かめたこと・確かめていないこと

**■確かめた（ソースを読んだ）。** 主不等式の証明の組み立て。定理 A・B・C、ハダマール、補題 14、シーソー恒等式の主張と docstring。ねじれた格子と目標の格子の定義（空間・内積・整）。ソースに

“Arakelov” の語が無いこと。定理 5 の証明の組み立て、合成持ち上げの大きさの補題 16 の証明の流れ、レベル $N$ の選び方の補題、数の組み替えの恒等式、分解しない素数での整除性の補題 19 の主張と材料（節「上界の中身：長さはどこから来るか」）。定理 7 の証明の骨格、体積の比の三段の分解の主張、主要な組の比の補題の主張と証明の骨格、良いひねりの定義（両版。節「下界の中身：主項はどこから来るか」）。主項の出どころ：上界と下界の導出の合流点（両版）、主要な組の比の四つの因子の分解と各因子の高さ（両版の証明）、ひねらない L 値の大きさの等式と鋭さの定理の主張（節「主項の出どころ：なぜ同じ量が両側に出るか」）。依存の閉包などの機械の集計は、HTML の節「文書から移したコードの分析」。

**■確かめていない（推測）。** 予測される整除性がテータ関数の jet の整除性から出る証明（New/Derivatives）。例外的な素数での単因子の定理の証明。定理 B の証明（注釈と題だけから書いた）。下界の部品（交換恒等式、比較作用素、補助の形式の経路、偽の持ち上げ）の証明と、Congruences の中身（注釈と題だけから書いた）。主項 main が下界では体積の比の高さから、上界では合成持ち上げの評価から出ること。素数の和 $s_{\mathrm{fin}}$ が合成持ち上げの整除性として入る仕組み。ひねりが整の構造で果たす役割。

**■次に読むもの。** (1) 下界：テータの鎖 $\Theta_{\vartheta}$ と体積の比 $Z(1)/Z(\theta_{\iota})$（`heightLe_chainDeterminant_one_div`、`exists_hasSmallRatios_heightLe_liftDeterminant_div`）。(2) 上界：形式の長さ（定理 5）に $m\,\mathrm{rem}$ が入る所と、合成持ち上げ。