③ jet の付値の下からの評価

主張（grh と grh-compact）

Naoya Umezaki　　Claude

2026 年 11 月 28 日

この文書の文章は、すべて Claude（AI）が作成した。人間の著者は、内容をすべて理解・確認しているわけではない。

この文書について

注意。grh-lean の証明は、機械の検査（Lean の型検査と、使う公理の確認）を通っただけで、数学者が通して読んだものではなく、論文も付いていない（元のリポジトリの README による）。この文書は、その Lean のコードを読んで整理した記録で、リーマン予想・一般リーマン予想が証明されたと主張するものではない。証明の正しさについて、筆者は判断していない。

jet の四つの評価のうち ③（分解しない素数 p での、jet の p 進の付値の**下からの**評価。付値 $\geq s_{\mathrm{fin}}$）の主張と、証明の組み立て（どの部品をどう組み合わせるか）をまとめる。③ は上界（短い形式を作る側）で、整除性の利得 gain_p を与える（`study/notes/mainineq-grh.pdf`）。各部品の中の証明は、まだ大まかにしか扱わない。正規形は `study/notes/normalform.pdf`。主張は grh（grh/src、コミット `72fead1`）の Lean のコードから写し、記号は docstring に従った。依存の分析は HTML の節「正規形から ③ へ」（study/report/index.html）にある。「**解釈**（推測を含む）：」の所は私の理解で、確かめていない。

目次

三段の形（grh） 2

③ の位置づけ：なぜ標準データか 2

設定と記号 3

勘定（正規形を仮定にとる） 4

③：標準データの jet 4

③′ ：持ち上げ一本 5

証明の組み立て（grh） 6

③ = 正規形を持つこと + 勘定 6

(1) 標準データのテータ級数は正規形を持つ 6
(2) 勘定の三段 8
等式と不等式：書き換えで jet は保たれる 9

compact 版 10

この文書で扱わなかったこと 10

三段の形（grh）

grh では ③ は三段になっている。上の段は下の段を使う。

段	Lean	主張の中身
勘定	`norm_jet_minorProd_le_of_hasNormalForm`	正規形を持つ**任意の**級数 F について、小行列式の積に沿った jet の付値 $\geq D -$ (誤差)
③	`norm_jet_minorProd_jetSeries_le`	標準データのテータ関数のテイラー級数について、同じ評価
③′	`mem_raises_predictedDivisibility`	標準データを核に入れたテータ持ち上げ一本が、p 進のゲージを高々 $p^{-(D-\text{誤差})}$ 倍にする

D（予測される整除性、`predictedDivisibility`）と誤差は三段で共通。勘定の段は正規形の**定義**（`HasNormalForm`）だけを仮定にとり、③ の段で正規形の**存在**（標準データのテータ関数が正規形を持つこと、`exists_hasNormalForm_jetSeries`）を入れる。

③ の位置づけ：なぜ標準データか

③ は上界（短い形式を作る側）で使う。上界の対象と、標準データの関係は次のとおり（grh。Lean で確かめた）。

1. **上界の対象**：目標の形式を、シーソー恒等式で「定値空間の持ち上げの鎖の有限結合」（合成持ち上げ）に書き換える（`mainineq-grh.pdf` の上界の節）。
2. **持ち上げの核は標準データ**：鎖の一本一本の持ち上げ $X_j \to X_{j+1}$ はヴェイユ表現の核で与えられ、核のデータ `Data.translateDatum` は「$\mathrm{Hom}(X_j, X_{j+1})$ の整な真空を、有限ハイゼンベルク作用素で平行移動したもの」（UpperBound/Objects/Columns.lean:869）。鎖のデータの台の点では、これは標準データに入る（`IsWeakChainDatum.translateDatum_mem_standardData`、UpperBound/Divisibility/ChainValuation.lean:168）。
3. **評価したいもの**：持ち上げが p 進のゲージ（整除性）をどれだけ上げるか。③′ がそれで、鎖の m 本に足して上界の利得 gain_p になる。

■なぜ二種類のテータ関数が出るか。 本来評価したいのは、保型形式の側のテータ関数（持ち上げの核＝標準データのテータ級数）の jet の p 進の付値である。ヴェイユ表現のテータ関数のままでは p 進の構造（フロベニウス合同）が見えないので、辞書（節「証明の組み立て」）で「CM 楕円曲線のテータ関数 θ の積 $\times$ 整な級数」に書き換え、曲線の側でフロベニウス合同から正規形を出し、正規形

から勘定で jet の付値を出す。

上界の合成持ち上げ ← 持ち上げの鎖（核＝標準データ）← ③′ ← ③ ← 辞書 + 正規形 + 勘定.

下界では ③ を使わず、④（鋭さ）を使う。④ が正規形を当てる相手は試験形式の側の級数（`exists_hasNormalForm_resolutionForms`）で、標準データではない。アルキメデス的な大きさ ① も真空のテータ関数の jet を評価するが、正規形は使わず、θ の積への書き換えを ① でも使うかは確かめていない。

設定と記号

- $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$、$E = K(\zeta_{q_1})$、$\Phi$ は E の無限素点の集合（$f = \#\Phi$）。p は K で分解しない素数、$\iota_p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_p$ は固定した埋め込み、$\mathcal{O}$ は $\mathbb{C}_p$ の整数環。
- $v(\pi_p)$（`piPrimeValuation`）：惰性なら 1、$p = d$ なら $1/2$。ρ_p（`varpiValuation`）：惰性なら $1/(p^2-1)$、$p = d$ なら $1/(2p-2)$。
- 正の指数の集合 I_p（`positivePartnerExponents`）：惰性なら奇数、$p = d$ なら $e \geq 1$ のすべて。相手 $\tau' = -p^e\tau$（`Parameters.partner`）。
- 変数：大きさ $n' \times n$ の行列 z_τ（$\tau \in \Phi$）の成分 $z_{(\tau,b,a)}$。$N = \#n'$（行の数）。
- 重さの図形 κ：$\kappa(\tau, h)$ は素点 τ での高さ h の列の数。高さ $< N$ の列だけを数える。B（`boxes`）はそれらの列の箱の総数。
- 標準的な詰め方 i'（`WeylIndex`）：各素点 τ で、図形 $\kappa(\tau, \cdot)$ の各箱に n' の元（行）を一つずつ入れる。
- jet（`jet`）：多項式 P と冪級数 F について $P(\partial)F(0)$。

定義 1 (小行列式の積)**.** $y = (y_\tau)$ を、行が n で添字づけられた整な行列（成分は $\mathcal{O}$）とする。図形の高さ h の列 j ごとに、$z_\tau y_\tau$ の小行列式で、行は i' がその列に入れた h 個の行、列は最初の h 個のものをとる。それらの全部の積を $P_y = \texttt{minorProd}\ i'\, y$ と書く（z の成分の多項式）。

解釈（推測を含む）：$P_y(\partial)$ は、図形 κ のシューア関手に沿った微分（重さ κ の表現の座標）を、小行列式の積で書いたもの。

定義 2 (予測される整除性)**.** τ について、高さ $< N$ の列のうち、高さ 1 の列の数を a_τ、ほかの列の数を a'_τ、それらの箱の数を l_τ とする。

$$D = v(\pi_p) \sum_{e \in I_p} \sum_{\tau \in \Phi} \Big(\big(a_\tau/p^e - a_{\tau'} - a'_{\tau'}\big)_+ + \big(l_\tau/p^e - l_{\tau'}\big)_+ - a'_\tau/p^e \Big), \qquad \tau' = -p^e\tau.$$

$p = d$ のときは、さらに $\frac{1}{2}\sum_\tau \big(\min(a_\tau, a_{\tau'} + a'_{\tau'}) + a'_\tau + \min(l_\tau, l_{\tau'})\big)$（$\tau' = -\tau$、$e = 0$ の分）を引く（`predictedDivisibility`、New/Derivatives/Divisibility/Count.lean:415）。

- a_τ は長い行の長さ（a-place で a、ほかで 0）。第一項は、長い行の整除性が相手の素点の列に食われる形：相手が a-place なら $a_{\tau'} = a$ で消える（衝突）。
- **解釈**（推測を含む）：$\sum_e a/p^e$ はルジャンドルの公式の形で、e を奇数に限ることと $v(\pi_p)$ の因子が、素数の和 s_{fin} の $(1 - \chi_K)$ に当たる。上界の gain_p との正確な関係は、この文書では確かめていない。

■誤差。 三段とも、D から $fN^3\big(1+\log_p \max(B,1)\big)$ を引いたものが付値の下界になる。

勘定（正規形を仮定にとる）

定理 3 (勘定)**.** p を分解しない素数、$|\varpi| = p^{-\rho_p}$ とし、冪級数 F（z の成分の、$\mathbb{C}_p$ 係数の級数）が正規形を持つとする：整な W と整な λ_{ej} があって

$$F(\varpi z) = W(z)\exp\Big(\frac{\varpi^{p+1}}{p}\sum_{e\in I_p^\circ}\sum_{j}\lambda_{ej}\,\Gamma_e(z)^{p^j}\Big).$$

このとき、任意の標準的な詰め方 i' と整な行列 y について

$$v\big(P_y(\partial)F(0)\big)\ \geq\ D - fN^3\big(1+\log_p\max(B,1)\big).$$

Lean（New/Derivatives/Divisibility/Count.lean:690）：

```
theorem norm_jet_minorProd_le_of_hasNormalForm [DecidableEq n'] (hp : chiK P.d p ≠ 1)
    (hϖ : ‖ ϖ ‖ = p ^ (-varpiValuation P.d p))
    (hF : HasNormalForm (partnerExponents P.d p) (P.partner s p) ϖ l F)
    (i' : WeylIndex n' κ) (y : P.Φ s → n → ℕ → valRingCp p) :
    let N : ℕ := card n'
    ‖ jet ℂ_[p] (minorProd i' fun (τ : P.Φ s) (a : n) (k : ℕ) ↦ (y τ a k : ℂ_[p])) F ‖ ≤
      p ^ (-(predictedDivisibility P.d p (P.partner s p) κ N -
        card (P.Φ s) * N ^ 3 * (1 + Real.logb p (max (boxes κ N) 1 : ℕ))) : ℝ)
```

- 付値の下界は、Lean ではノルムの上界 $\|\cdot\| \le p^{-(\cdots)}$ として書かれる。
- この定理は、目印付きの素点と「電荷」を入れた一般形 `norm_jet_minorProd_le_of_charges` の、目印なし・電荷 1 の場合として示されている。一般形は、上界の例外的な素数（衝突を避けるためにヘッケ作用素を掛ける所）で使う。
- 注釈（Count.lean の冒頭）による証明の方針：一次の代入で jet の次数に効く結合 Γ_e を π_p で割り切れるようにし、その次数で級数を整にする。ルジャンドルの評価（微分の階乗の付値）を当て、連鎖律で出る因子の付値を差し引く。箱一つあたり約 $\gamma_p = 1/(p-1) - \rho_p$ の利得があり、差し引く量は $v(\pi_p)$ 掛ける `deductionTerm` の和。

③：標準データの jet

定義 4 (標準データとそのテータ級数)**.** • **整な真空**（`intVacuum`）：ヴェイユ表現の真空ベクトルに (尺度)$^{\mathrm{rank}}$ を掛け、値が整で共役が有界になるようにしたもの。

- **標準データ**（`standardData`、$\delta = 1$）：整な真空を、p の上で整な有限アデールの点で平行移動したものの、ι_p で整になる複素数を係数とする一次結合の全体。
- **テータ級数**（`Space.jetSeries`）：ϕ のテータ関数の 0 でのテイラー級数で、変数を a 倍したもの。z^α の係数は $a^{|\alpha|}/\alpha!$ 掛ける $\theta(v_\alpha\otimes\phi)$（$v_\alpha$ は単項式 z^α のフォック・ベクトル）。ここでは $a = c\cdot\mathrm{jetScale}$、$\mathrm{jetScale} = \mathrm{periodFactor}\cdot\sqrt{2\pi/\sqrt{d}}/\Omega_0$（$\Omega_0$ は CM 周期。`Parameters.jetScale`）。

定理 5 (③ 分解しない素数での整除性)**.** ϕ を $n'\times n$ 行列の空間（座標のノルムの和を形式とする定値空間の *hom*）の上の、レベル 1 の標準データとし（*Lean* では `f`）、c を $|\iota_p(c)|\le 1$ の複素数とす

る。F を ϕ のテータ級数（変数を $c\cdot\mathrm{jetScale}$ 倍、係数を ι_p で $\mathbb{C}_p$ に読む）とすると、任意の i'、整な y について

$$v\big(P_y(\partial)F(0)\big)\ \geq\ D - fN^3\big(1+\log_p\max(B,1)\big).$$

Lean（New/Derivatives/Vacuum/Divisibility.lean:198）：

```
theorem norm_jet_minorProd_jetSeries_le
    {f : 𝒮 ((stdSpace (E P s) n).hom (stdSpace (E P s) n'))} {c : ℂ} (hp_nonsplit : chiK P.d p ≠ 1)
    (hf : f ∈ standardData ((stdSpace (E P s) n).hom (stdSpace (E P s) n')) 1) (hc : ‖ ι ₚ c ‖ ≤ 1)
    (i' : WeylIndex n' κ) (y : P.Φ s → n → ℕ → valRingCp p) :
    let N : ℕ := card n'
    ‖ jet ℂ_[p] (minorProd i' fun (τ : P.Φ s) (a : n) (k : ℕ) ↦ (y τ a k : ℂ_[p]))
        ((((stdSpace (E P s) n).hom (stdSpace (E P s) n')).jetSeries
          (c * P.jetScale s) f).map ι ₚ) ‖ ≤
      p ^ (-(predictedDivisibility P.d p (P.partner s p) κ N -
        card (P.Φ s) * N ^ 3 * (1 + Real.logb p (max (boxes κ N) 1 : ℕ))) : ℝ)
```

定理 3 との違いは、F が具体的な級数（標準データのテータ級数）になったことだけ。この F が正規形を持つこと（exists_hasNormalForm_jetSeries、同じファイル 156 行）を、多変数の正規形（normalform.pdf の定理 5）から示して、定理 3 を当てる、という形と思われる（証明は読んでいない）。

③′：持ち上げ一本

定理 6 (③′ 持ち上げ一本)**.** 重さ (κ,e) のテータ核（thetaKernel）を、尺度 $c\cdot\mathrm{jetScale}$ ($|\iota_p(c)|\le 1$) と任意のレベル K でとる。レベル 1 の標準データ Φ は、この核の持ち上げで p 進のゲージを高々

$$p^{-\left(D-fN^3(1+\log_p\max(B,1))\right)}$$

倍にする（Kernel.raises：すべての g、h、ξ について、$\mathrm{jetMap}(\omega(g,h)\Phi)\,\xi$ の hd' でのゲージが、ξ の gd でのゲージの高々この数倍）。

Lean（New/UpperBound/Kernels/ThetaLiftGauge.lean:327）：

```
lemma mem_raises_predictedDivisibility {c : ℂ} {K : Subgroup (Gf (P.E s) n)}
    {a b : AutChar (E P s)} {ψ ψ' : (w : FinPlace (P.E s)) → MulChar (ResField w) ℂ}
    {ha : a.HasWeight ea ψ} {hb : b.HasWeight eb ψ'}
    {p : ℕ} [Fact p.Prime] [PadicPlace p] {h κ : IsLiftWeight n n' κ eb e}
    (hp : chiK P.d p ≠ 1) (hc : ‖ ι ₚ c ‖ ≤ 1)
    {Φ : 𝔦((stdSpace (P.E s) n).hom (stdSpace (P.E s) n')).finitePart}
    (h Φ : Φ.val ∈ standardData ((stdSpace (E P s) n).hom (stdSpace (E P s) n')) 1) :
    let N : ℕ := card n'
    Φ ∈ (thetaKernel h κ (c * P.jetScale s) ha hb K).raises 1 1
      (p ^ (-(predictedDivisibility P.d p (P.partner s p) κ N -
        card (P.Φ s) * N ^ 3 * (1 + Real.logb p (max (boxes κ N) 1 : ℕ))) : ℝ))
```

上界では、これを持ち上げの鎖の m 本に足して、合成持ち上げの付値を出す（mainineq-grh.pdf の「p 進の側：整除性」）。

証明の組み立て（grh）

③ = 正規形を持つこと + 勘定

定理 5 の証明本体は 2 行で、次の二つを組み合わせる（New/Derivatives/Vacuum/Divisibility.lean:198）。

```
obtain ⟨ϖ, l, hϖ, h_form⟩ := exists_hasNormalForm_jetSeries hp_nonsplit hf hc
exact P.norm_jet_minorProd_le_of_hasNormalForm s hp_nonsplit hϖ h_form i' y
```

(1) **標準データのテータ級数は正規形を持つ**（exists_hasNormalForm_jetSeries、同じファイル 156 行）。
(2) **勘定**（定理 3）を、この級数に当てる。

勘定は正規形の**定義**だけを仮定にとり、正規形の**存在**（normalform.pdf の定理 5、多変数の正規形）には依存しない。依存グラフで確かめた大きさ（多変数の正規形は箱として数えた）：

部品	New の宣言	行数	Lib の宣言	正規形の存在定理を使うか
(1) 正規形を持つこと	250	2662	2654	使う
(2) 勘定	117	1295	151	使わない

二つの部品が共有する New の宣言は 43 で、データの設定（体と素点）など。

(1) 標準データのテータ級数は正規形を持つ

■論理の流れ。 二つの独立な主張を組み合わせる。

曲線の側（CM 楕円曲線の算術）	**保型形式の側**（辞書）
一変数の正規形（normalform.pdf の命題 6。フロベニウス合同から）	標準データのテータ級数 = テータ積 × 整な級数
↓ 代入して掛ける	（exists_jetSeries_map_eq_thetaProd_pow_mul）
多変数の正規形（normalform.pdf の定理 5）：**任意の**恒等の分解 (u_j, m_j) と**任意の**整な H について、$\prod_j \theta(u_j^\dagger z)^{m_j} \cdot H$ は正規形を持つ	辞書が、標準データ ϕ ごとに**特定の** (u_j, m_j) と H を作る

多変数の正規形を、辞書の作った (u, m, H) に当てはめる

⇓

尺度の変更（HasNormalForm.rescale）

⇓

ϕ のテータ級数は正規形を持つ

証明本体（exists_hasNormalForm_jetSeries、New/Derivatives/Vacuum/Divisibility.lean:156）の要の行：

```
obtain ⟨ϖ, l, hϖ, -, h_normalForm_thetaProd⟩ := P.exists_hasNormalForm s hp_nonsplit
obtain ⟨J, _, u, m, h_resolution, hu, H, hH, h_theta⟩ :=
  exists_jetSeries_map_eq_thetaProd_pow_mul (N := 1) one_ne_zero (by simp) hf
...
exact ⟨ϖ, _, hϖ, (h_normalForm_thetaProd u m h_resolution h_integral H hH).rescale ⟨_, h_scale⟩⟩
```

- **一変数と多変数のどちらを使うか**：直接使うのは多変数の正規形だけ。一変数の正規形は、多変数の正規形の証明の中で使われる。辞書は正規形を一切使わない（一変数・多変数・定義のどれも、フロベニウス合同も、辞書の依存の閉包に入らない。HTML の節「③ の組み立て」）。
- 多変数の正規形が「**どんな**恒等の分解と整な級数でもよい」と言っているので、辞書の作ったものにそのまま当てはめられる。ϖ は多変数の正規形のもの、λ_{ej} は尺度の変更で $\alpha^{(p^e+1)p^j}$ 倍（$\alpha = c \cdot \mathrm{periodFactor}$）。多変数の正規形の「$\lambda_{e0}$ が単元」は捨てる。
- 恒等の分解の u_j が p の上で整であることは、辞書が与える「有限アデールの像が整」と、$p \nmid q_1$ から出す（`isIntegralAbove_of_finiteImage_mem`）。
- 尺度：辞書は変数を $\mathrm{areaScale}/\Omega_0$ 倍したテータ級数について述べる。$\mathrm{jetScale} = \mathrm{periodFactor} \cdot \mathrm{areaScale}/\Omega_0$ の残りの因子 $c \cdot \mathrm{periodFactor}$ は p 進で整（periodFactor の大きさは 1）。

■辞書の主張。 レベル $\delta \neq 0$ の標準データ ϕ と $N = \delta\bar{\delta}$ について、p の上で整な恒等の分解 (u_j, m_j) と、整な級数 $H \in \mathcal{O}[[y(u_j^\dagger z)]]$ があって

$$\big(\phi \text{ のテータ級数、変数を } \bar{\delta} \cdot \mathrm{areaScale}/\Omega_0 \text{ 倍}\big) = \Big(\prod_j \theta(u_j^\dagger z)^{m_j}\Big)^N \cdot H$$

（New/Derivatives/Vacuum/StandardDataProducts.lean:478）。③ では $\delta = 1$、$N = 1$。

■辞書の道具。 ファイルの注釈によると証明は三段で、材料が二つある。

1. **真空の展開**（`exists_isVacuumExpansion`）：フーリエ反転で、整な真空を、ある一つのベクトル F の平行移動の一次結合として書く。F のテータ関数は、タイトなフレームに沿った θ の積で、係数は p で整（分母 b は p と素）。Lib のヴェイユ表現の構成（真空が直線のテータの積になること、フーリエ反転、テータの辞書。Lib/Weil/Construction）を使う。
2. **平行移動**：θ の積の平行移動は、各因子を平行移動したものの積（ハイゼンベルク作用）。
3. **一つの曲線の整数性**（`exists_prod_twistedTranslate_eq_thetaProd_mul`）：CM 格子のテータ関数 θ を、δy_i が周期になる点 y_i でひねって平行移動したものを、$\bar{\delta} z_i$ で見ると、$\prod_i \theta(z_i)^N$ 掛ける整な級数になる。CM（$\delta \in \mathcal{O}_K$ 倍の同種写像）を使うが、正規形とは別の事実。

材料：

- **タイトなフレーム**（Vacuum/TightFrames、ShortVectors）：E の格子 $\mathfrak{a}_0$ の中の有限族 w で、$\sum_w (w^\dagger z)\, w = h\, z$。1 の冪根 ζ^k と双対基底から組み、長さを q_1（と p）と素に調整する。円分体の整数の上の線形代数。これを bk で割ると恒等の分解になる（`IsTightFrame.isResolution`）。
- **整な真空**（Vacuum/IntegralVacuum）：真空を、値が整で共役が有界になるように尺度を取ったもの。

■大きさ。 辞書の閉包は New の宣言 218、Lib の宣言 2547。Lib は主に、ヴェイユ表現の構成（Lib/Weil/Construction 469、MixedModel 166）、アデール（259）、素点（237）、CM のシグマとテータ（Lib/CM/Sigma 155、Integrality 109）、ユニタリ群（115）、複素テータ（99）。主張の型に出る E の Weil データのインスタンスを経由した設定の側の依存（分解するヘッケ指標など）も入る。

■アーベル多様体の言葉での読み（解釈）。 **解釈**（推測を含む）：CM 型が K から誘導されているので、$\mathbb{C}^{\Phi\times n}$ を E の格子で割った複素トーラス（アーベル多様体）は、K で CM を持つ楕円曲線の冪

と同種になる。一次形式の族 $z \mapsto (u_j^\dagger z)_j$ は E^n の格子を曲線の格子の直積の中に写し（辞書の整数性の条件）、複素トーラスの言葉ではトーラスから曲線の直積への準同型で、テータ関数をこれで引き戻すと θ の積になる。辞書は、その同種をテータ関数のレベルで具体的に書いたものと読める。

- ただし **Lean はアーベル多様体の同種を述べても使ってもいない**。証明しているのは、$\mathbb{C}^{\Phi\times n}$ の上のテータ級数、格子、一次形式の関係だけ。「同種」は、一次元の格子の条件 `PeriodPair.IsIsogeny`（a 倍が格子を格子に写し、$a\bar{a}\cdot$ 面積の比が整数。Lib/CM/Sigma/Basic.lean:86）として出るだけ。辞書の依存の閉包に入る Lib/Shimura は、ComplexTheta（Appell–Humbert のデータ、テータ関数の空間の次元公式。複素トーラスの上の直線束とテータ関数を解析的に扱う部分）と Uniformisation の格子とねじれ点の部分だけで、Lib にあるアーベル多様体・アーベルスキームの理論（Lib/Shimura/AbelianScheme など）は入らない。
- コードの中でアーベル多様体に触れるのは、Vacuum/TightFrames.lean の「文献との関係」の注釈だけ：タイトなフレーム、テータ関数の同種公式、ねじれ点の値による整数性は文献で知られている、とし、Conway–Sloane、Finis、Mumford（On the equations defining abelian varieties I）を挙げる。
- **未解決の問い**：同種（複素トーラスの準同型と、テータ関数の同種公式による引き戻し）を通す経路の方が、辞書をより簡単に証明できる可能性はあるか。特に、難しいのが関数の恒等式なのか、H が p 進で整であること（整数性）なのかを見極める必要がある。別に調べる。

■compact **では。** 正規形の主張 `thetaProducts_normal_form` は、最初から「タイトなフレームに沿った θ の平行移動の積」の族 `Parameters.thetaProducts` について述べる。標準データとのつなぎは `norm_jetSeries_le`（New/Curve/ConjugatesOfJets.lean）で、「一次形式 L について、族のどのテータ積 Θ でも $|\iota(L(\Theta))| \le r$ なら、標準データのテータ級数でも $\le r$」という形。標準データのテータ級数が正規形を持つとは言わず、jet の上界を一次結合で移す。

(2) 勘定の三段

勘定の中心は、目印と電荷を入れた一般形 `norm_jet_minorProd_le_of_isChargeExponent`（Count.lean）で、その証明の注釈は三段に分ける。目印なし・電荷 1 の場合が定理 3。

1. **新しい方向と連鎖律。**
   - 各素点 τ・各高さ h について整な行列 $g_{\tau,h}$ を取り、方向 y を gy に変えて、新しい方向での結合 $\sum_a \beta_a^{p^e}\beta'_a$（素点とその相手の組）が π_p で割り切れるようにする。$e \le \log_p B$ の $e \in I_p^\circ$ について。行列式の付値の和は、差し引き分 $v(\pi_p)\sum_e\sum_\tau \mathrm{deductionTerm}(\tau,\tau',e)$ 以下（`exists_newDirection_dvd`、New/Derivatives/Divisibility/NullFrames.lean）。中身は、$\mathcal{O}$ の上の掃き出し：有限個の合同条件を、法の積の分の行列式で満たす。
   - 連鎖律（`norm_jet_columnDetProd_subst`）：F に一次の代入 $z = \varpi\cdot$(新しい方向と電荷の式) をした級数を G とすると、小行列式の積 P_y に沿った F の jet と、列ごとの行列式の積に沿った G の jet の大きさの比は、箱ごとに $|\varpi|$ と電荷の因子、列ごとに $|\det g_{\tau,h}|$。
2. **正規形の性質を使う。**新しい方向では結合が π_p で割り切れるので、正規形の「零錐の上の整数性」（`HasNormalForm.norm_coeff_subst_le_one`。$|c_\varpi \pi_p| = p^{-1/(p-1)}$ が効く）から、G の次数 B の係数は整。**正規形を使うのはここだけ。**

3. **ルジャンドルの評価。**整な級数の、次数 B の整な斉次多項式に沿った jet の付値は $\geq B/(p-1) - fN^3(\lfloor \log_p B \rfloor + 1)$（`norm_jet_le_of_isHomogeneous`。微分で出る階乗の付値 $v_p(m!) \geq m/(p-1) - (1 + \lfloor \log_p m \rfloor)$ から）。

合わせると、連鎖律の比の分（ϖ の分 $\rho_p B$、電荷、行列式の分）を引いて

$$v\big(P_y(\partial)F(0)\big) + (\text{電荷}) \;\geq\; \gamma_p B - v(\pi_p)\sum_e \sum_\tau \text{deductionTerm} - fN^3(\lfloor \log_p B \rfloor + 1), \qquad \gamma_p = \frac{1}{p-1} - \rho_p.$$

予測される整除性の形にする：`mul_sum_deductionTerm_le`（Count.lean:541）

$$v(\pi_p)\sum_e \sum_\tau \text{deductionTerm} \;\leq\; \gamma_p B - D$$

（目印のある素点では高さ 1 の列を除いた図形で）から、右辺は $D -$ (誤差) 以上になる（`norm_jet_minorProd_le_of_charges`）。

解釈（推測を含む）：付値の利得の源は微分の階乗（箱一つあたり $1/(p-1)$）で、尺度 ϖ の分 ρ_p を引いた γ_p が箱あたりの利得。正規形の悪い部分 $\exp(c_\varpi \Xi)$ は、結合を割り切れるようにする方向の取り替えの「費用」（行列式の付値）として、相手の素点の列の数に応じて利得を削る。その費用が deductionTerm で、D の $(a_\tau/p^e - a_{\tau'} - \cdots)_+$ の形になる。

等式と不等式：書き換えで jet は保たれる

辞書による書き換えは近似ではなく**冪級数の等式**で、jet はそのまま保たれる。③′ までの鎖のうち、等式と不等式は次のとおり（grh）。

段	種類	Lean
持ち上げの値 = テータ級数の jet：$P(\partial)(\text{jetSeries}\, a\, f)(0) = \theta(v \otimes f)$（$v$ は多項式 $z \mapsto P(az)$ のフォック・ベクトル）	等式	`Space.jet_jetSeries_eq_theta`（定義から）
標準データのテータ級数 $= (\prod \theta(u_j^\dagger z)^{m_j})^N \cdot H$	等式	辞書
尺度の変更：$\text{jetSeries}(ab)f = \text{rescale}_a(\text{jetSeries}\, b\, f)$	等式	`Space.jetSeries_mul_eq_rescale`
正規形 ⇒ jet の付値	不等式	勘定（定理 3）
すべての標準データの jet の評価 ⇒ 持ち上げのゲージの評価	不等式	`omega_mem_raises_of_jet_minorProd_le`

- ③ は、標準データのテータ級数**そのもの**が正規形を持つことを示して、その同じ級数に勘定を当てる。θ の積の側で評価してから戻す段は無い。等式で同じ級数だから。
- 辞書の右辺の H が**整**であることが効いている。多変数の正規形は「θ の積 × 任意の整な H」について述べるので、H は評価の邪魔をしない。H が整でなければ正規形が崩れる。
- 勘定の性格：データの設定（体と素点の定義）を除くと、勘定が使う Lib は 96 宣言（冪級数、π_p・ρ_p などの記号の定義、シューア加群の小行列式）。中身は、図形の列の組み合わせ的な勘定と、整数環の上の線形代数（方向の取り替え）と、階乗の付値。**解釈**（推測を含む）：算術の中身は正規形に集まっていて、勘定はその帳簿付け。

compact 版

compact は勘定と③をまとめて、シューア行列の jet について述べる。

定理 7 (compact：シューア行列の jet の整除性)**.** κ が階数に合い（`FitsRanks`）、B 個の箱を持ち、$|\varpi| = p^{-\rho}$、$|\theta| = p^{\omega}$ とする。Θ が B 次まで零錐の上で整（`IsIntegralOnNullCone`）なら、シューア行列に沿った *jet* の行列の各成分の付値は少なくとも

$$\Big(\frac{1}{p-1} - \rho\Big)B + \omega \sum_{e \in S} \sum_{\sigma} \mathrm{couplingCount}(\sigma, \sigma', e) - \#\Phi\, N^3(\lfloor \log_p B \rfloor + 1) - m.$$

ここで m はその行の箱の電荷の総和、`couplingCount` は $\min(t_\sigma/p^e, r_{\sigma'} + t_{\sigma'}) + r_\sigma/p^e + \min(B_\sigma/p^e, B_{\sigma'})$（$t$ は高さ 1 の列の数、r はほかの列の数、B_σ はその箱の数）。

Lean（New/Curve/JetDivisibility.lean:58）：（`norm_schurJet_le`）

- compact の形は「箱一つあたり $\gamma = 1/(p-1) - \rho$ の利得、から結合の分を差し引く」で、grh の勘定の注釈（`deductionTerm` が `couplingCount` と同じ式）と同じ形。grh の最終の主張は D（`predictedDivisibility`）で書かれ、二つの形は `mul_sum_deductionTerm_le` でつながる（節「証明の組み立て」）。compact の勘定 `norm_schurJet_le` は New の部分が 6 宣言だけで、中身のほとんどは Lib にある。
- 持ち上げ一本の形（③′ に当たる）は `Data.IsGoodDatum.mem_raises`（New/Columns/LocalStatement.lean:103）。こちらは上界の鎖の中の命題で、目印付きの素点 Λ の分の指数 `markExponent` と、損失 `liftLoss`（`jetExponent` から作る）でゲージの倍率を書く。grh の一般形（目印・電荷付き）に当たる。

この文書で扱わなかったこと

- 勘定の各段の中の証明（新しい方向の作り方の詳細、連鎖律の計算、`mul_sum_deductionTerm_le` の計算）。
- 辞書（`exists_jetSeries_map_eq_thetaProd_pow_mul`）の各段の中の証明と、同種を通す別の経路の検討。
- ③′ を ③ から出す所の詳細（`omega_mem_raises_of_jet_minorProd_le` の証明）。
- ① が θ の積への書き換えを使うかどうか。
- D と、上界の gain_p・素数の和 s_{fin} との正確な関係。