主不等式からリーマン予想まで

grh-lean（grh 版）の Lean のコードに沿った解説

Naoya Umezaki　　Claude

2026 年 11 月 27 日

この文書の文章は、すべて Claude（AI）が作成した。人間の著者は、内容をすべて理解・確認しているわけではない。

この文書について

注意。grh-lean の証明は、機械の検査（Lean の型検査と、使う公理の確認）を通っただけで、数学者が通して読んだものではなく、論文も付いていない（元のリポジトリの README による）。この文書は、その Lean のコードを読んで整理した記録で、リーマン予想・一般リーマン予想が証明されたと主張するものではない。証明の正しさについて、筆者は判断していない。

対象は grh-lean の読みやすい版 grh/（コミット `72fead1`）。この版は手元でビルドが通り（エラー 0、`sorry` 0）、五つの主定理の公理は `propext`・`Classical.choice`・`Quot.sound` だけであることを確かめた。

各命題は、まず普通の数学の言葉で定理環境に書き、その後に対応する Lean の主張をソースから文面のまま写した（場所は grh/src からの相対パスと行番号）。数学の言い換えは、Lean の主張と docstring と証明の中の注釈から読んだもの。「**解釈**（推測を含む）：」と書いた所と、「計算の筋」と書いた所は、私の理解で、Lean の証明の各行とは照らし合わせていない。

目次

記号 2

誤差項とは何か 3

全体の流れ 5

大まかな構造 6

段 1：主不等式 7

段 2・3：総誤差を誤差項で書く 7

段 4：許容データの存在 8

段 5：素数定理 9

段 6・7：片側の評価 9

段 8：片側の判定法 10

誤差項のラプラス変換と L 関数の零点 10

段 8 の見方 13

段 9：$\mathrm{Re}\, s > 1/2$ での非消滅 14

段 10：臨界線と、リーマン予想 15

要点 17

compact **版との違い** 17

読んでいない所 17

記号

定義 1 (パラメータ)**.** $18480 = 16 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ の倍数 q_0 と、素数 d で $d \equiv q_0/2 - 1 \pmod{q_0}$ を満たすものの組 $P = (q_0, d)$ をパラメータという。$K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$、$\chi_K = (\cdot/d)$（ルジャンドル記号）とおく。

Lean（New/Reduction/Data/FieldsAndPlaces.lean）：構造体 `New.Parameters`（体 `P.K`、指標 `chiK d`）。

定義 2 (フォン・マンゴルト関数)**.** 正の整数 n に対し

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & n = p^k \ (p \text{ は素数}, k \geq 1), \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

とおく。素因数分解から $\sum_{m \mid n} \Lambda(m) = \log n$、したがって $\mathrm{Re}\, s > 1$ で $\sum_{n \geq 1} \Lambda(n) n^{-s} = -\zeta'(s)/\zeta(s)$。指標 χ について同様に $\sum_n \chi(n)\Lambda(n)n^{-s} = -L'(s,\chi)/L(s,\chi)$。$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$ はチェビシェフ関数で、素数べき $p^k \leq x$ を重み $\log p$ で数えたもの（素数定理は $\psi(x) \sim x$）。

Lean(Mathlib)：`ArithmeticFunction.vonMangoldt`、記法は `Λ`（`open ArithmeticFunction` の下で）。

定義 3 (重みと誤差項)**.** 正の整数 q に対し

$$\lambda_{d,q}(n) = \begin{cases} \Lambda(n)\big(1 - \chi_K(n)\big) & n \equiv 1 \pmod{q}, \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

とおく（Λ は定義 2）。$G_q(s) = \frac{1}{\varphi(q)}\big(\sum_{\psi \bmod q}(\frac{L'}{L}(s, \psi\chi_K) - \frac{L'}{L}(s,\psi)) - 1\big)$（$\mathrm{Re}\, s > 1$ では $\sum_n \lambda_{d,q}(n) n^{-s} - s/(\varphi(q)(s-1))$）、$c_q = \mathrm{Re}\, G_q(1)$ として、**誤差項**を

$$R_q(x) = \sum_{n \leq x} \lambda_{d,q}(n)\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{x}\Big) - \frac{\log x}{\varphi(q)} - c_q$$

と定める。d が奇数で q と素なら $R_q(x) \to 0$（$x \to \infty$）。

Lean（New/Reduction/Zeros/PrimeError.lean:45, 56, 65）：

```
def lambdaKResidueClass (n : ℕ) : ℝ := residueClass (1 : ZMod q) n * (1 - chiK d n)
def logDerivMean [NeZero q] (s : ℂ) : ℂ :=
  (∑ ψ : DirichletCharacter ℂ q,
    (logDeriv (entireL (quadTwist ψ d)) s - logDeriv (entireL ψ) s) - 1) / φ q
def primeRemainder [NeZero q] (x : ℝ) : ℝ :=
  lambdaKSum d q 0 x - lambdaKSum d q 1 x - x.log / φ q - re (logDerivMean d q 1)
```

注意 4. $1-\chi_K(n) \in \{0,1,2\}$。素数 p が K で分解すれば 0、分解しなければ 2。したがって $\lambda_{d,q} \geq 0$。この非負性が定理 31 で効く。

誤差項とは何か

誤差項とは、素数を数えた実際の値と、期待される値（主項）との差である。三つを並べる。

■ゼータ：素数全体。 $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$（素数べき $p^k \leq x$ を重み $\log p$ で数えたもの）。素数定理により $\psi(x) \sim x$。誤差は $\psi(x) - x$。明示公式 $\psi(x) - x = -\sum_\rho x^\rho/\rho - \cdots$ により、零点の実部の最大値 θ が誤差の大きさ x^θ を決め、

$$\text{リーマン予想} \iff \psi(x) - x = O(x^{1/2+\varepsilon}).$$

■ディリクレ：算術級数の中の素数。 $\psi(x;q,a) = \sum_{n \leq x,\ n \equiv a \bmod q} \Lambda(n) \sim x/\varphi(q)$（素数は既約な類に均等に分布する）。誤差は $\psi(x;q,a) - x/\varphi(q)$。指標の直交性で $\psi(x;q,a) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_\chi \bar{\chi}(a)\, \psi(x,\chi)$、$\psi(x,\chi) = \sum_{n \leq x} \chi(n)\Lambda(n)$ と分かれ、自明な指標が主項 $x/\varphi(q)$ を、ほかの χ が $L(s,\chi)$ の零点で決まる誤差を与える。おおまかに、法 q の GRH $\iff$ すべての a で $\psi(x;q,a) - x/\varphi(q) = O(x^{1/2+\varepsilon})$。

■この証明：類 1 の、K で分解しない素数。

$$A_q(x) = \sum_{n \leq x} \lambda_{d,q}(n)$$

は、法 q で 1 の類の素数べきのうち、$K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ で分解しないものの数え上げ（重みは惰性の素数で 2、分岐する d で 1、分解する素数で 0）。χ_K は法 q の類とは独立にほぼ半々で ± 1 を取る（$\psi\chi_K$ は主指標にならない）ので、重み $1 - \chi_K$ の平均は 1 で、$A_q(x) \sim x/\varphi(q)$（$\psi(x;q,1)$ と同じ主項）。誤差は

$$A_q(x) - \frac{x}{\varphi(q)} = \Big[\psi(x;q,1) - \frac{x}{\varphi(q)}\Big] - \sum_{n \leq x,\ n \equiv 1} \chi_K(n)\Lambda(n)$$

で、前半は $L(s,\psi)$ の零点、後半はひねった $L(s,\psi\chi_K)$ の零点で決まる。補題 28 の留数に二種類の零点が現れるのはこのため。

■R_q は、その誤差の平均。 部分和の公式 $\sum_{n \leq x} a_n(1/n - 1/x) = \int_1^x A(t)\, t^{-2}\, dt$ により

$$R_q(x) = \int_1^x \frac{A_q(t) - t/\varphi(q)}{t^2}\, dt - c_q,$$

（主項 $t/\varphi(q)$ の積分が $\log x/\varphi(q)$）。$R_q(x) \to 0$ となるよう $c_q = \int_1^\infty (A_q(t) - t/\varphi(q))\, t^{-2}\, dt$ なので

$$\boxed{R_q(x) = -\int_x^\infty \frac{A_q(t) - t/\varphi(q)}{t^2}\, dt}$$

すなわち $R_q(x)$ は、x **より先での数え上げの誤差を、重み** $1/t^2$ **で平均したもの**。（この式は Lean の定義と部分和からの私の計算。コードには `primeRemainder_eq_sum_posPart` などの書き換えが在るが、この積分の形の補題は確かめていない。）

■指数の対応と、片側の向き。 $A_q(t) - t/\varphi(q) = O(t^\theta)$ なら $R_q(x) = O(x^{\theta-1})$（重み $1/t^2$ で一つ下がる）。だから片側の評価 $R_q(x) \le x^{-1/2+\varepsilon}$（定理 22）は誤差の指数 $\theta = 1/2+\varepsilon$、つまり $\sqrt{x}$ 程度の誤差にあたり、判定法の仮定 $R \le x^{\beta-1}$ は誤差の指数 β に、結論は「$\mathrm{Re}\, s > \beta$ に零点が無い」に対応する。定義の形で読めば、$R_q(x) \le x^{-1/2+\varepsilon}$ は「x までの、重み付きの非分解素数の数え上げが、期待値を大きく超えない」という上からの評価（主不等式の docstring の「重み付けた非分解素数の上界」）。

	数えるもの	期待値	零点
ゼータ	素数べき全体 $\psi(x)$	x	ζ
ディリクレ	類 a の素数べき $\psi(x;q,a)$	$x/\varphi(q)$	法 q の $L(s,\chi)$
この証明	類 1 の、K で分解しない素数べき	$x/\varphi(q)$	法 q の $L(s,\psi)$ と $L(s,\psi\chi_K)$

定義 5 (体 E と無限素点)**.** $s \ge 1$ に対し、$l_0(s)$ を $27s$ より大きい最小の 3 のべき、$\mathrm{towerDeg}(s) = 3\,l_0(s)\,2^s$、$q_1 = q_0 \cdot \mathrm{towerDeg}(s)$ とし、$E = K(\zeta_{q_1})$（ζ_{q_1} は 1 の原始 q_1 乗根）とおく。E は CM 体で、無限素点の集合 Φ は（K 上のガロア群を通して）$(\mathbb{Z}/q_1)^\times$ と同一視され、群になる。$f = \#\Phi$（E の無限素点の数）、

$$\Phi_a = \{\tau \in \Phi : \tau \equiv 1 \pmod{q_0}\}$$

（a-places）とする。$\#\Phi_a = \mathrm{towerDeg}(s) = q_1/q_0$、$f = \varphi(q_0)\,\#\Phi_a$。整数 ν の類の素点を ν と書き、$\nu\sigma$ は群 Φ での積（ν が q_1 と素でなければ単位元）。

Lean (New/Reduction/Data/FieldsAndPlaces.lean:110, 195; New/Reduction/Data/AdmissibleData.lean:191, 238)：

```
abbrev q₁ : ℕ := P.q₀ * towerDeg s
def E : Type := CyclotomicField (P.q₁ s) P.K
abbrev f : ℕ := Core.numInfPlaces D.E
def aPlaces : Finset D.Φ := {τ : D.Φ | P.placeClass (P.q₀.dvd_mul_right
  (towerDeg D.towerExp)) τ = 1}
```

定義 6 (許容データ)**.** パラメータ P の**許容データ** D とは、次の組である。

1. 整数のスケール x, x_1, b で、$(\log b)^{100} \le x$、$x^{10^6} \le x_1$、$x_1^{10^6} \le b$、$(\log x_1)^6 \le \log b$、$\log\log b \ge 10^{12}\,c_P$（$c_P$ は P だけで決まる定数）。$q_1 x_1 \mid b$。$a = xb$ とおく。
2. 持ち上げの数 m：2 のべきで $m \in [\sqrt{x}, 2\sqrt{x}]$。階数 r：3 のべきで $r \in [x^5, 3x^5]$。指数 s：$2^s = m^{22}$、$s \le 32\log x$。体 E と Φ, Φ_a は s から定義 5 で決まる。
3. b-places $\Phi_b \subset \Phi$：どの元も $\equiv -1 \pmod{q_0}$、$\#\Phi_a \le \#\Phi_b \cdot \log b$、かつ素数 $\ell \le (r+1-m)\cdot 5r$ について疎（`IsSparse`）。
4. 重み $\kappa : \Phi \to \mathbb{N}$：$\kappa(\tau) = b$（$\tau \in \Phi_b$）、$a/x_1$（それ以外）。
5. 素数 $p_0 \ne p_1$：$\equiv 1 \pmod{q_2^2}$（$q_2 = (q_0 d)^{s+6}$）、$[b^{10}, b^{11}]$ の中、$p_0 p_1 = \alpha\bar{\alpha}$ となる $\alpha \in \mathcal{O}_K$。
6. 素数 N：$\equiv 1 \pmod{q_2^2}$、$\log N \in [\log N_-, \log N_- + \sqrt{\log b}]$（$N_-$ は κ、m、$p_0 p_1$、E の判別式、b から決まる下限）、$N = \beta\bar{\beta}$ となる $\beta \in \mathcal{O}_E$。

Lean（New/Reduction/Data/AdmissibleData.lean）：構造体 `New.Data P`（フィールド `natX`、`natX₁`、`natB`、`m`、`r`、`towerExp`、`bPlaces`、`weight`、`levelPrime`、`piMBar`、`N`、`piN` と、その条件）。例：

```
/-- `m` lies in `[√x, 2 √x]`. -/
m_mem : (m : ℝ) ∈ Icc (exp (logX / 2)) (2 * exp (logX / 2))
/-- The weight is `b = a / x` at the `b`-places and `a / x₁` elsewhere, where `a = x b`. -/
weight_eq (τ : P.Φ towerExp) : weight τ = if τ ∈ bPlaces then natB else natX * natB / natX₁
```

定義 7 (素数の和と総誤差)**.** 許容データ D に対し、$\Lambda_K(\nu) = \Lambda(\nu)(1 - \chi_K(\nu))$ として

$$s_{\mathrm{fin}}(y,\sigma) = \sum_{1 \le \nu \le a} \Lambda_K(\nu)\,\big(y/\nu - \kappa(-\nu\sigma)\big)_+ \qquad (y \in \mathbb{R},\ \sigma \in \Phi),$$

$$s_{\mathrm{main}} = a\Big(\log a - \frac{1}{f}\sum_{\tau \in \Phi} \log \kappa(\tau) + c_1\Big),$$

$$\mathrm{rem} = \sum_{\tau \in \Phi_a} \big(s_{\mathrm{fin}}(a,\tau) - s_{\mathrm{main}}\big)$$

とおく。s_{main} は、$\tau \in \Phi_a$ にわたる $s_{\mathrm{fin}}(a,\tau)$ の平均の主項（期待値）である。

Lean（New/Reduction/Data/AdmissibleData.lean:251; New/Reduction/PrimeSums.lean:68, 73）：

```
def primeSum (y : ℝ) (σ : D.Φ) : ℝ :=
  ∑ ν ∈ Finset.Icc 1 D.a, lambdaKResidueClass P.d 1 ν * (y / ν - D.weight (D.placeOfInt (-ν)) * σ
  ↪ ))⁺
def mainPrimeSum : ℝ :=
  D.a * (log D.a - (∑ τ : D.Φ, log (D.weight τ)) / D.f + (logDerivMean P.d 1 1).re)
def totalRemainder : ℝ := ∑ τ ∈ D.aPlaces, (D.primeSum D.a τ - D.mainPrimeSum)
```

注意 8. 解釈（推測を含む）：GUIDE の用語表によれば、s_{fin} の素数 p の部分を $2\log p$ で割ったものは、合成持ち上げが p で割り切れるべき指数（gain）である。s_{fin} は「整除性」の勘定から来る量で、主不等式は、大きさ（上界）と整除性（下界）の比較から rem を抑える（GUIDE の書き方。証明は読んでいない）。

全体の流れ

段	番号	Lean	内容
1	定理 9	`New.star_inequality`	主不等式 $m\,\mathrm{rem} \le f a (\log b)^5$
2	補題 12	`Data.totalRemainder_eq`	rem を $R_{q_0}(x), R_{q_0}(x_1), R_1(x_1)$ で書く
3	系 14	`Data.primeRemainder_le`	$R_{q_0}(x)$ の上からの評価
4	命題 15	`eventually_exists_data`	大きいどの x にも許容データ
5	定理 18	`eventually_abs_primeRemainder_le`	素数定理
6	命題 20	`eventually_primeRemainder_natCast_le`	整数 x で $R_{q_0}(x) \le C x^{-1/2+6\varepsilon}$
7	定理 22	`eventually_primeRemainder_le_rpow`	片側の評価
8	定理 31	`New.LFunction_ne_zero_of_primeRemainder_le`	片側の判定法
9	定理 33	`New.grh`	$\mathrm{Re}\,s > 1/2$ で $L(s,\chi) \ne 0$
10	系 37・40・42	`New.zeros_on_line` ほか	臨界線、リーマン予想

議論の新しい中身は段 1 だけで、段 2〜10 は数十の宣言の古典的な解析的整数論。段 2〜7 と段 9 は New/Reduction/OneSidedBound.lean、段 8 は New/Reduction/Zeros/Criterion.lean に在る。

大まかな構造

主役は誤差項 $R_{q_0}(x)$（定義 3）である。証明は「誤差項の片側の評価 $\Rightarrow$ 半平面に零点が無い」という古典的な枠組みに、主不等式を差し込む形をしている。

1. **誤差項から L の非消滅へ（定理 31、段 8）。**誤差項と L 関数が結びつく所。類 $d \equiv d_0 \pmod{q_0}$ の**すべての**素数 d について片側の評価 $R_{q_0}(x) \le x^{\beta-1}$ が成り立てば、$\mathrm{Re}\, s > \beta$ で $L(s,\psi) \neq 0$。証明は補題 27（d の選び方）、補題 28（留数の式）、補題 30（Landau の補題）。
2. **その仮定を満たす（定理 22）。**$R_{q_0}(y) \le y^{-1/2+\varepsilon}$。示したい零点 ρ に対し $1/2 < \beta < \mathrm{Re}\,\rho$ を取り、$\varepsilon = \beta - 1/2$ とすれば定理 31 の仮定になる（定理 33 の証明）。定理 22 は、整数 x での評価（命題 20）から、整数部分を取る簡単な評価で出る。
3. **整数 x での評価（命題 20）の材料は三つ。**
   （a）**データの存在**（命題 15、系 17、段 4）：大きいどの x にも、大きさのよい許容データ D が在る。主不等式は「どの D についても」の主張なので、具体的な x に使うにはこれが要る。
   （b）**主不等式からの評価**（系 14）：$R_{q_0}(x) \le \varphi(q_0)(\log b)^6/m + |R_{q_0}(x_1)| + \log b\,|R_1(x_1)|$。
   （c）**素数定理**（定理 18、補題 19、段 5）：系 14 の右辺に残る、遠い点 x_1 での誤差を x^{-2} 以下にする。主不等式だけでは $R(x)$ と $R(x_1)$ を比べることしかできず、$R(x_1)$ が小さいことは外から持ってくる。
4. **系 14 は、主不等式からの計算。**定理 9（$m \cdot \mathrm{rem} \le fa(\log b)^5$）は rem についての主張だが、補題 12 により rem は誤差項の組み合わせ $a(\#\Phi_b(R_{q_0}(x) - R_{q_0}(x_1)) + \#\Phi_a R_1(x_1))$ に等しい。つまり主不等式は、点 x での誤差と遠い点 x_1 での誤差を組み合わせた量についての主張である。これにデータの性質 $f = \varphi(q_0)\#\Phi_a$、$\#\Phi_a \le \#\Phi_b \log b$ を入れて割り算すると系 14 が出る。計算の要は補題 12 の恒等式（b-places の重みが、x までの非分解素数を選び出す仕掛け）。
5. **最後に、**定理 33（$\mathrm{Re}\, s > 1/2$ で $L(s,\chi) \neq 0$）から、関数等式で系 37・40・42（臨界線、リーマン予想）。

定理 9（主不等式）＋ 補題 12（rem の書き直し）＋ データの性質
$\Downarrow$
系 14 ＋ 系 17（データの存在、段 4） ＋ 補題 19（素数定理、段 5）
$\Downarrow$
命題 20（整数 x）$\Rightarrow$ 定理 22（片側の評価）
$\Downarrow$ （定理 31 の仮定）
定理 31（片側の判定法、段 8）
$\Downarrow$
定理 33（$\mathrm{Re}\, s > 1/2$ で非消滅）$\Rightarrow$ 系 37・40・42（リーマン予想）

既知の部品と新しい部品。素数定理（定理 18）は、この重みと算術級数の版の既知の結果（ジーゲル–ウォルフィッツからも出る。Lean ではタウバー型の議論で証明）。データの存在（命題 15）も既知の道具（Behrend 型の構成、算術級数の素数の窓、類群）の組み合わせだが、主不等式の条件に合わせた構成である。片側の判定法（定理 31）は Landau 型の古典的な議論。**新しい中身は定理 9 の一か所だけ**で、次に読むのはその証明（定理 A・B・C）になる。

段 1：主不等式

定理 9 (主不等式)**.** パラメータ P の任意の許容データ D について

$$m \cdot \mathrm{rem} \le f\, a\, (\log b)^5.$$

Lean（New/Reduction/MainInequality.lean:87）：

```
theorem star_inequality {P : Parameters} (D : Data P) :
    D.m * D.totalRemainder ≤ D.f * D.a * D.logB ^ 5 := by
```

注意 10. ファイルの冒頭のコメントによれば、一つの格子の余体積（指数で補正したもの）を両側から評価する：$\mathrm{mainAmount} \le (V + 2\delta)/\dim \le \mathrm{mainAmount} - (n/\dim)\, m\,\mathrm{rem}$（誤差を除く）。上の評価は定理 A（`span_short_integralRamified_eq_top`、`indexLe_normalizedPoincare`）と定理 B（`enough_forms`）、下の評価は定理 C（`integral_forms_long`）。主項が消えて $m\,\mathrm{rem}$ が誤差で抑えられる。本書は証明に立ち入らない。

注意 11 (大きさ)**.** 一つの τ あたり $s_{\mathrm{fin}}(a,\tau)$ は $a\log(\cdot)$ 程度。$f = \varphi(q_0)\#\Phi_a$ なので、定理 9 は「τ あたりの平均の誤差は $\varphi(q_0)\, a(\log b)^5/m$ 以下」と言い換えられる。素朴な大きさに比べて $1/m \approx x^{-1/2}$ だけ小さい。

段 2・3：総誤差を誤差項で書く

補題 12. 許容データ D について

$$\mathrm{rem} = a\Big(\#\Phi_b\big(R_{q_0}(x) - R_{q_0}(x_1)\big) + \#\Phi_a\, R_1(x_1)\Big).$$

Lean（New/Reduction/PrimeSums.lean:177）：

```
lemma totalRemainder_eq :
    D.totalRemainder =
      D.a * (#D.bPlaces * (primeRemainder P.d P.q₀ D.x - primeRemainder P.d P.q₀ D.x₁) +
        #D.aPlaces * primeRemainder P.d 1 D.x₁) := by
```

計算の筋.（定義からの私の計算。補題の主張と合うことは確かめたが、Lean の証明の各行とは照らし合わせていない。）$\tau \in \Phi_a$、$1 \le \nu \le a$ とする。$a = xb$ なので

$$\big(a/\nu - \kappa(-\nu\tau)\big)_+ = \begin{cases} b\,(x/\nu - 1)_+ = a\,(1/\nu - 1/x)_+ & (-\nu\tau \in \Phi_b), \\ (a/x_1)(x_1/\nu - 1)_+ = a\,(1/\nu - 1/x_1)_+ & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

$\tau \equiv 1$、Φ_b の元は $\equiv -1 \pmod{q_0}$ だから、$-\nu\tau \in \Phi_b$ となりうるのは $\nu \equiv 1 \pmod{q_0}$ のときだけ。そのとき τ が Φ_a を動くと $-\nu\tau$ は $\equiv -1$ の類の全体を一度ずつ動くので、ちょうど $\#\Phi_b$ 個の τ で $-\nu\tau \in \Phi_b$。（ν が q_1 と素でない場合、ν は q_0 の素因数のべきで、それらは K で分解するので $\Lambda_K(\nu) = 0$。）よって $S_q(X) = \sum_{\nu \le X} \lambda_{d,q}(\nu)(1/\nu - 1/X)$ とおくと

$$\sum_{\tau \in \Phi_a} s_{\mathrm{fin}}(a,\tau) = a\Big(\#\Phi_b\big(S_{q_0}(x) - S_{q_0}(x_1)\big) + \#\Phi_a\, S_1(x_1)\Big).$$

一方 `card_aPlaces_mul_mainPrimeSum`（New/Reduction/PrimeSums.lean）によれば $\#\Phi_a\, s_{\mathrm{main}} = a\big(\#\Phi_a(\log x_1 + c_1) + \#\Phi_b(\log x - \log x_1)/\varphi(q_0)\big)$。引き算して $R_q = S_q - \log X/\varphi(q) - c_q$ を使うと主張が出る。 □

注意 13. b-places の重み b が、「法 q_0 で 1 の類の、x までの非分解素数」を選び出す仕掛けになっている。それ以外の重み a/x_1 は、x_1 までの全体の和を与える。

系 14. 許容データ D について

$$R_{q_0}(x) \le \frac{\varphi(q_0)(\log b)^6}{m} + |R_{q_0}(x_1)| + \log b \cdot |R_1(x_1)|.$$

Lean（New/Reduction/OneSidedBound.lean:33）：

```
lemma Data.primeRemainder_le {P : Parameters} (D : Data P) :
    primeRemainder P.d P.q₀ D.x ≤ P.q₀.totient * D.logB ^ 6 / D.m +
      |primeRemainder P.d P.q₀ D.x₁| + D.logB * |primeRemainder P.d 1 D.x₁| := by
```

Proof. 補題 12 より $R_{q_0}(x) = \mathrm{rem}/(a\#\Phi_b) + R_{q_0}(x_1) - (\#\Phi_a/\#\Phi_b)R_1(x_1)$。定理 9 より $\mathrm{rem} \le fa(\log b)^5/m$。$f = \varphi(q_0)\#\Phi_a$ と $\#\Phi_a \le \#\Phi_b \log b$ を入れる。 □

段 4：許容データの存在

命題 15 (許容データの存在)**.** $0 < \varepsilon < 1/100$ とする。十分大きいどの整数 x にも、パラメータ P の許容データ D で、D のスケール x が与えられた x に等しく、

- $x_1 = \lfloor \exp(x^{\varepsilon/6}) \rfloor$、
- b は $\exp(x^{\varepsilon})$ を超える $q_1 x_1$ の倍数のうち最小のもの、
- m は $\sqrt{x}$ 以上の最小の 2 のべき、r は x^5 以上の最小の 3 のべき

となるものが在る。このとき $x^{\varepsilon/6} - 1 \le \log x_1$、$x^{\varepsilon} \le \log b \le x^{\varepsilon} + 1$。

Lean（New/Reduction/Data/Existence.lean:898）：

```
theorem eventually_exists_data (P : Parameters) {ε : ℝ} (hε : 0 < ε) (hε_lt : ε < 1 / 100) :
    ∀ᶠ x : ℕ in atTop, ∃ D : Data P,
      D.natX = x ∧
      D.natX₁ = ⌊exp ((x : ℝ) ^ (ε / 6))⌋₊ ∧
      IsLeast {b : ℕ | D.q₁ * D.natX₁ | b ∧ exp ((x : ℝ) ^ ε) < b} D.natB ∧
      IsLeast {n : ℕ | (∃ j : ℕ, n = 2 ^ j) ∧ √x ≤ n} D.m ∧
      IsLeast {n : ℕ | (∃ j : ℕ, n = 3 ^ j) ∧ (x : ℝ) ^ 5 ≤ n} D.r ∧
      (x : ℝ) ^ (ε / 6) - 1 ≤ D.logX₁ ∧
      D.logB ∈ Set.Icc ((x : ℝ) ^ ε) ((x : ℝ) ^ ε + 1) := by
```

注意 16 (構成)**.** ファイルの冒頭の説明による。スケール、m、r、s、体 E は x から上のとおり決まる。b-places は $-g^e$（$g = 1 + 3l_0q_0$、e は **Behrend 型の集合**。`exists_three_term_free`、Shapira 2006）の形の素点。素数 p_0, p_1, N は算術級数の素数の窓（`exists_prime_modEq_one_log_mem`、**ジーゲル–ウォルフィッツの定理**の帰結）から、$p_0p_1 = \alpha\bar{\alpha}$ の α は K の類群での鳩の巣論法から、$N = \beta\bar{\beta}$ の β は二平方和の議論から得る。定数が実効的でなくても、十分大きい x での存在だけを使うので差し支えない。

系 17. $0 < \varepsilon < 1/100$ のとき、十分大きいどの整数 x にも、スケール x の許容データで $\log b \le 2x^{\varepsilon}$、$\sqrt{x} \le m$、$x^{\varepsilon/12} \le \log x_1$ のものが在る。

Lean（New/Reduction/OneSidedBound.lean:74）：

```
lemma eventually_exists_data_scales (P : Parameters) {ε : ℝ} (hε : 0 < ε) (hε_lt : ε < 1 / 100)
↪  :
    ∀ᶠ x : ℕ in atTop, ∃ D : Data P, D.x = x ∧ D.logB ≤ 2 * (x : ℝ) ^ ε ∧
      (x : ℝ) ^ (1 / 2 : ℝ) ≤ D.m ∧ (x : ℝ) ^ (ε / 12) ≤ D.logX₁ := by
```

段 5：素数定理

定理 18 (素数定理)**.** $d \neq 2$ を素数、q を d と素な正の整数とする。どの自然数 B についても、十分大きい実数 y で

$$|R_q(y)| \le (\log y)^{-B}.$$

Lean（New/Reduction/Zeros/PrimeNumberTheorem.lean:217）：

```
theorem eventually_abs_primeRemainder_le (hd : d ≠ 2) (h_cop : q.Coprime d) (B : ℕ) :
    ∀ᶠ y : ℝ in atTop, |primeRemainder d q y| ≤ 1 / y.log ^ B := by
```

docstring によれば、$v \mapsto R_q(e^v)$ のラプラス変換にタウバー型の定理を当てて示す。ジーゲル–ウォルフィッツの定理からも出る。

補題 19. $\varepsilon > 0$ とする。十分大きい整数 x と、$l \ge x^{\varepsilon/12}$ のどの実数 l についても $|R_{q_0}(e^l)| \le x^{-2}$、$|R_1(e^l)| \le x^{-2}$。

Lean（New/Reduction/OneSidedBound.lean:95）：

```
lemma eventually_abs_primeRemainder_exp_le (P : Parameters) {ε : ℝ} (h ε : 0 < ε) :
    ∀ᶠ x : ℕ in atTop, ∀ l : ℝ, (x : ℝ) ^ (ε / 12) ≤ l →
      |primeRemainder P.d P.q₀ (exp l)| ≤ (x : ℝ) ^ (-2 : ℝ) ∧
      |primeRemainder P.d 1 (exp l)| ≤ (x : ℝ) ^ (-2 : ℝ) := by
```

Proof. 定理 18 を $B \ge 24/\varepsilon$ で使う：$(\log e^l)^{-B} = l^{-B} \le x^{-\varepsilon B/12} \le x^{-2}$。 □

段 6・7：片側の評価

命題 20. $0 < \varepsilon < 1/100$ とする。十分大きいどの整数 x でも

$$R_{q_0}(x) \le \bigl(64\varphi(q_0) + 3\bigr)\, x^{-1/2+6\varepsilon}.$$

Lean（New/Reduction/OneSidedBound.lean:125）：

```
lemma eventually_primeRemainder_natCast_le (P : Parameters) {ε : ℝ} (h ε : 0 < ε)
    (hε_lt : ε < 1 / 100) :
    ∀ᶠ x : ℕ in atTop,
      primeRemainder P.d P.q₀ x ≤ (64 * P.q₀.totient + 3) * (x : ℝ) ^ (-1 / 2 + 6 * ε) := by
```

Proof. 系 17 のデータ D に系 14 を当て、$x_1 = e^{\log x_1}$ で補題 19 を使う：

$$R_{q_0}(x) \le \varphi(q_0)\frac{(2x^{\varepsilon})^6}{x^{1/2}} + x^{-2} + 2x^{\varepsilon}x^{-2} \le \big(64\varphi(q_0)+3\big)x^{-1/2+6\varepsilon}. \qquad \square$$

注意 21. 指数 $-1/2$ は、主不等式の左辺の $m \ge \sqrt{x}$ から来る。

定理 22 (片側の評価)**.** q_0 を 18480 の正の倍数、$d \equiv q_0/2 - 1 \pmod{q_0}$ を素数、$\varepsilon > 0$ とする。十分大きいどの実数 y でも

$$R_{q_0}(y) \le y^{-1/2+\varepsilon}.$$

Lean（New/Reduction/OneSidedBound.lean:200）：

```
theorem eventually_primeRemainder_le_rpow {q₀ : ℕ} [NeZero q₀] (hq₀ : 18480 ∣ q₀) {d : ℕ}
    [hd_prime : Fact d.Prime] (hd : d ≡ q₀ / 2 - 1 [MOD q₀]) {ε : ℝ} (h ε : 0 < ε) :
    ∀ᶠ y : ℝ in atTop, primeRemainder d q₀ y ≤ y ^ (-1 / 2 + ε) := by
```

Proof. q_0, d からパラメータ P を作る。$7\delta \le \varepsilon$、$\delta < 1/100$ の δ で命題 20 を使い、整数から実数へは $R(y) - R(\lfloor y \rfloor) \le 26/y$（$y \ge 2$。`primeRemainder_sub_primeRemainder_floor_le`）と $\lfloor y \rfloor^t \le 2y^t$（$-1 \le t \le 0$）で移る。 $\square$

段 8：片側の判定法

定義 23 (極の型)**.** 関数 $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と $r : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ について、次が成り立つとき E は**留数 r の極の型**（`IsPolar E r`）であるという：E は可測で、定数 C と $\mathbb{C}$ 上の有理型関数 Φ があって、(a) $v \ge 0$ で $|E(v)| \le Ce^{v}$、(b) $\mathrm{Re}\, s > 2$ で $\Phi(s) = \int_0^\infty E(v)\, e^{(1-s)v}\, dv$、(c) $\mathrm{Re}\,\rho > 0$ のどの ρ でも $(z-\rho)\Phi(z) \to r(\rho)$（$z \to \rho$、$z \ne \rho$）。つまり変換は $\mathrm{Re}\, s > 0$ で高々一位の極を持ち、ρ での留数が $r(\rho)$（極で無ければ 0）。

Lean（Lib/Analytic/EntireLFunction.lean:76）：

```
def IsPolar (E : ℝ → ℝ) (r : ℂ → ℂ) : Prop :=
  Measurable E ∧
  ∃ (C : ℝ) (Φ : ℂ → ℂ),
    Meromorphic Φ ∧
    (∀ v ≥ (0 : ℝ), |E v| ≤ C * Real.exp v) ∧
    (∀ s : ℂ, 2 < re s → Φ s = ∫ v : ℝ in Ioi 0, E v * Complex.exp ((1 - s) * v)) ∧
    ∀ ρ : ℂ, 0 < re ρ → Tendsto (fun z ↦ (z - ρ) * Φ z) (𝓝[≠] ρ) (𝓝 (r ρ))
```

以下、E_χ（`entireL χ`）は $L(s,\chi)$、ただし χ が主指標なら $(s-1)L(s,\chi)$（整関数）。

誤差項のラプラス変換と L 関数の零点

定理 31 の要は、誤差項 R_q のラプラス変換が L 関数の零点に極を持つことである。次の三つの補題で示される（New/Reduction/Zeros/PrimeError.lean。ファイルの冒頭は、指標の直交性と部分和による古典的な計算として Davenport を挙げる）。

補題 24 (重みのディリクレ級数)**.** $d \ne 2$ を素数、q を d と素とする。$\mathrm{Re}\, s > 1$ で

$$\sum_{n\ge 1} \lambda_{d,q}(n)\, n^{-s} = \frac{s}{\varphi(q)(s-1)} + G_q(s), \qquad G_q(s) = \frac{1}{\varphi(q)}\Big(\sum_{\psi \bmod q} \Big(\frac{E'_{\psi\chi_K}}{E_{\psi\chi_K}}(s) - \frac{E'_{\psi}}{E_{\psi}}(s)\Big) - 1\Big).$$

Lean（New/Reduction/Zeros/PrimeError.lean:263）：

```
lemma LSeries_lambdaKResidueClass_eq_add_logDerivMean (hd : d ≠ 2) (h_cop : q.Coprime d) {s : ℂ}
    (hs : 1 < s.re) :
    LSeries (fun n : ℕ ↦ lambdaKResidueClass d q n) s =
      s / (φ q * (s - 1)) + logDerivMean d q s := by
```

証明の筋（証明の注釈による）．指標の直交性 $\mathbf{1}_{n\equiv 1 \bmod q} = \frac{1}{\varphi(q)}\sum_\psi \psi(n)$ から $\lambda_{d,q}(n) = \frac{1}{\varphi(q)}\sum_\psi\big(\psi(n)\Lambda(n) - \psi\chi_K(n)\Lambda(n)\big)$。$\sum_n \psi(n)\Lambda(n)n^{-s} = -L'/L(s,\psi)$ なので

$$\sum_n \lambda_{d,q}(n)n^{-s} = \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\psi \bmod q}\Big(-\frac{L'}{L}(s,\psi) + \frac{L'}{L}(s,\psi\chi_K)\Big).$$

ひねった $\psi\chi_K$ は主指標にならない（quadTwist_ne_one）ので、$s=1$ の極 $1/(s-1)$ は $\psi = 1$ の項だけから出る。それを分けたものが G_q。 □

補題 25 (誤差項のラプラス変換)**.** $d \neq 2$ を素数、q を d と素とする。$\operatorname{Re} s > 2$ で

$$\int_0^\infty R_q(e^v)\, e^{(1-s)v}\, dv = \frac{1}{s-1}\Big(\frac{G_q(s)}{s} - \operatorname{Re} G_q(1)\Big).$$

Lean（New/Reduction/Zeros/PrimeError.lean:293）：

```
lemma integral_primeRemainder (hd : d ≠ 2) (h_cop : q.Coprime d) {s : ℂ} (hs : 2 < s.re) :
    ∫ v : ℝ in Set.Ioi 0, primeRemainder d q (Real.exp v) * Complex.exp ((1 - s) * v) =
      (logDerivMean d q s / s - re (logDerivMean d q 1)) / (s - 1) := by
```

重み $(1/n - 1/x)$ の部分和を変換すると $1/(s(s-1))$ が掛かる。主項 $\log x/\varphi(q)$ は $s/(\varphi(q)(s-1))$ の極を打ち消し、定数 $c_q = \operatorname{Re} G_q(1)$ は $s=1$ の極を打ち消す。右辺は G_q で書けているので、変換は $\mathbb{C}$ 全体の有理型関数に延びる。

補題 26 (G_q の留数)**.** どの ρ でも G_q は高々一位の極を持ち、留数は $\frac{1}{\varphi(q)}\sum_\psi\big(\operatorname{ord}_\rho E_{\psi\chi_K} - \operatorname{ord}_\rho E_\psi\big)$。

Lean（New/Reduction/Zeros/PrimeError.lean:363）：

```
lemma tendsto_sub_mul_logDerivMean (ρ : ℂ) :
    Tendsto (fun z : ℂ ↦ (z - ρ) * logDerivMean d q z) (𝓝[≠] ρ)
      (𝓝 ((∑ ψ : DirichletCharacter ℂ q, (analyticOrderNatAt (entireL (quadTwist ψ d)) ρ -
        analyticOrderNatAt (entireL ψ) ρ : ℂ)) / φ q)) := by
```

対数微分 E'/E の ρ での留数は零点の位数 $\operatorname{ord}_\rho E$ だから。

補題 27 (素数 d の選び方)**.** $\beta > 1/2$、$H \in \mathbb{R}$、$a \in (\mathbb{Z}/N)^\times$ とし、類 a のどの素数も $\equiv 7 \pmod 8$ で N と素とする。このとき類 a の素数 d で、法 N のどの指標 ξ についても $L(s, \xi\cdot(\cdot/d))$ が $\beta \le \operatorname{Re} s$、$|\operatorname{Im} s| \le H$ で消えないものが在る。

Lean（Lib/Analytic/QuadraticTwist.lean:796）：

```
lemma exists_entireL_quadTwist_ne_zero {N : ℕ} [NeZero N] {β : ℝ} (H : ℝ) {a : ZMod N}
    (h β : 1 / 2 < β) (ha : IsUnit a)
    (h_class : ∀ d : Primes, ((d : ℕ) : ZMod N) = a → (d : ℕ) % 8 = 7 ∧ N.Coprime d) :
    ∃ d : Primes, ((d : ℕ) : ZMod N) = a ∧ ∀ (ξ : DirichletCharacter ℂ N) (s : ℂ),
      β ≤ s.re → |s.im| ≤ H → entireL (quadTwist ξ d) s ≠ 0 := by
```

docstring によれば、悪い素数の数の評価（ポリヤ–ヴィノグラードフによる零点密度）を、類の上の $\sum \log p/p$ の発散（ディリクレ）と戦わせる。算術級数の素数定理は要らない。

補題 28 (留数)**.** $d \equiv 7 \pmod 8$ を素数、q を d と素とする。$v \mapsto R_q(e^v)$ は留数

$$r(s) = \frac{1}{\varphi(q)\, s(1-s)} \sum_{\psi \bmod q} \Big(\operatorname{ord}_s E_\psi - \operatorname{ord}_s E_{\psi\chi_K} \Big)$$

の極の型である。

Lean（New/Reduction/Zeros/PrimeError.lean:414）：

```
lemma isPolar_primeRemainder (hd : d % 8 = 7) (h_cop : q.Coprime d) :
    IsPolar (fun v : ℝ ↦ primeRemainder d q (Real.exp v)) fun s : ℂ ↦
      (∑ ψ : DirichletCharacter ℂ q,
        (analyticOrderNatAt (entireL ψ) s - analyticOrderNatAt (entireL (quadTwist ψ d)) s : ℂ)) /
        φ q / (s * (1 - s)) := by
```

証明の筋. 補題 25 の右辺の、$\rho \neq 0, 1$ での留数は、補題 26 の留数を $\rho(\rho-1)$ で割ったもの（`tendsto_logDerivMean_residue`）。符号が反転して主張の式になる。$s = 1$ は c_q の選び方で極にならない。仮定 $d \equiv 7 \pmod 8$ が、この補題のどこで効くかは未確認（$d \neq 2$ を出す所では使う）。 □

注意 29 (誤差項と L 関数が結びつく所)**.** 誤差項 R_q のラプラス変換の**極は L 関数の零点**で、**留数は**「$L(s,\psi)$ の零点の位数」から「ひねった $L(s,\psi\chi_K)$ の零点の位数」を引いたもの（を $\varphi(q)s(1-s)$ で割ったもの）。実軸の $0 < x < 1$ では $x(1-x) > 0$ なので、$L(s,\psi)$ の零点は**正**の、ひねった L の零点は**負**の留数を与える。

補題 30 (Landau)**.** E が留数 r の極の型で、$\beta > 0$、実数 $x > \beta$ で $\operatorname{Re} r(x) \geq 0$、十分大きい v で $E(v) \leq e^{(\beta-1)v}$ とする。このとき $\operatorname{Re}\rho > \beta$ なら $r(\rho) = 0$。

Lean（Lib/Analytic/Landau.lean:217）：

```
lemma IsPolar.landau {r : ℂ → ℂ} (h : IsPolar E r) {β : ℝ} (h β : 0 < β)
    (hr : ∀ x : ℝ, β < x → 0 ≤ (r x).re) (hE_le : ∀ᶠ v : ℝ in atTop, E v ≤ Real.exp ((β - 1) * v))
    {ρ : ℂ} (h ρ : β < ρ.re) :
    r ρ = 0 := by
```

証明の注釈によれば：$K/(s-\beta) - \Phi(s)$ が測度のラプラス変換 F を延ばす。a を β と F の収束座標の大きい方とすると、$\operatorname{Re} s > a$ に極は無い。$\beta < a$ なら、a での留数の符号のために F が a の左でも収束し、矛盾。

定理 31 (片側の判定法)**.** q_0 を 8 の正の倍数、$d_0 \equiv 7 \pmod 8$ を q_0 と素な整数、$\beta > 1/2$ とする。$d \equiv d_0 \pmod{q_0}$ の**どの**素数 d についても、十分大きい x で $R_{q_0}(x) \leq x^{\beta-1}$（$R$ は d に関する誤差項）と仮定する。このとき、法 q_0 のどの指標 ψ と、$\rho \neq 1$、$\operatorname{Re}\rho > \beta$ のどの ρ についても $L(\rho,\psi) \neq 0$。

Lean（New/Reduction/Zeros/Criterion.lean）：

```
theorem New.LFunction_ne_zero_of_primeRemainder_le {q₀ : ℕ} [NeZero q₀] (hq₀ : 8 ∣ q₀) {d₀ : ℕ}
    (hd₀_mod : d₀ % 8 = 7) (hd₀_cop : d₀.Coprime q₀) {β : ℝ} (h β : 1 / 2 < β)
    (h_bound : ∀ d : Primes, (d : ℕ) ≡ d₀ [MOD q₀] →
```

```
    ∀ᶠ x : ℝ in atTop, primeRemainder d q₀ x ≤ x ^ (β - 1))
  (ψ : DirichletCharacter ℂ q₀) {ρ : ℂ} (h ρ_ne : ρ ≠ 1) (h ρ_re : β < ρ.re) :
  ψ.LFunction ρ ≠ 0 := by
```

Proof. (1) 補題 27 を $H = |\operatorname{Im}\rho|$ で使い、類 d_0 の素数 d で、ひねった $E_{\chi\chi_K}$（$\chi \bmod q_0$）が $\beta \le \operatorname{Re} s$、$|\operatorname{Im} s| \le |\operatorname{Im}\rho|$ で消えないものを取る。(2) 補題 28 より $v \mapsto R_{q_0}(e^v)$ は極の型で、その領域では $r(s) = n(s)/(\varphi(q_0)\, s(1-s))$、$n(s) = \sum_{\chi \bmod q_0} \operatorname{ord}_s E_\chi \ge 0$。(3) 実数 $x > \beta$ で $\operatorname{Re} r(x) \ge 0$：$x \le 1$ なら $x(1-x) \ge 0$、$x \ge 1$ では $E_\chi(x) \ne 0$ なので $n(x) = 0$。(4) 仮定から $R_{q_0}(e^v) \le e^{(\beta-1)v}$。補題 30 で $r(\rho) = 0$、よって $n(\rho) = 0$、$E_\psi(\rho) \ne 0$。$\rho \ne 1$ なので $L(\rho, \psi) \ne 0$。 □

注意 32. 解釈（推測を含む）：係数が非負のディリクレ級数（ラプラス変換）は収束座標の上の実の点に特異点を持つ、という Landau の定理の型の議論。$\lambda \ge 0$（注意 4）と、ひねった側の零点を d の選び方で避けることで留数の符号がそろう。そのため、仮定は一つの d ではなく類の全部の素数 d での評価になっている。ファイルの冒頭によれば、仮定は L の実零点について何も要求しない（関連：Landau 1905、Montgomery – Vaughan §15.1 – 15.2、Suzuki arXiv 2411.07436）。

段 8 の見方

■明示公式との対応。 仕組みは、素数定理の誤差とゼータの零点を結ぶ明示公式と同じである。ゼータでは $\sum \Lambda(n) n^{-s} = -\zeta'/\zeta(s)$ で、$\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n)$ の変換は $s = 1$（主項 x）と ζ の零点に極を持ち、明示公式 $\psi(x) - x = -\sum_\rho x^\rho/\rho - \cdots$ により、零点の実部が誤差の大きさを決める（だから $\psi(x) - x = O(x^{1/2+\varepsilon})$ とリーマン予想は同値。von Koch 1901）。ここでは

	ゼータ	定理 31
数えるもの	素数べき（重み Λ）	$n \equiv 1 \bmod q$ の、K で分解しない素数べき（重み λ）
和の取り方	$\sum_{n \le x} \Lambda(n)$	$\sum_{n \le x} \lambda(n)(1/n - 1/x)$（リース型の平滑化）
ディリクレ級数	$-\zeta'/\zeta$	$\frac{1}{\varphi(q)} \sum_\psi (-L'/L(s,\psi) + L'/L(s,\psi\chi_K))$
変換の極	ζ の零点	$L(s,\psi)$ とひねった $L(s,\psi\chi_K)$ の零点

算術級数への制限は、ディリクレの算術級数定理と同じく、指標の直交性で L 関数の和に分ける。平滑化 $(1/n - 1/x)$ は変換の側で $1/(s(s-1))$ を与える。したがって $R_{q_0}(x) = O(x^{-1/2+\varepsilon})$ は、この L 関数たちの GRH と（形式的には）同値な主張で、**主不等式は実質的に、この重み付きの素数の数え上げに $\sqrt{x}$ の節約を与える定理**である。（明示公式そのものは Lean のコードには無い。使うのは変換の極と留数、Landau の補題だけ。）

■片側の評価と実の零点。 古典的な同値は両側の評価についてである。主不等式が与えるのは上からの評価だけなので、Landau の補題で補う：$x^{\beta-1} - R(x) \ge 0$ の変換は、実軸 (β, ∞) に符号の悪い極が無ければ $\operatorname{Re} s > \beta$ まで延び、複素の零点も含めて $\operatorname{Re} s > \beta$ に零点は無い。古典的な片側版（Montgomery – Vaughan 15.1 など）では、ここで**実の零点**（ジーゲル零点のようなもの）が障害になり、「実の零点が無ければ」という条件が付く。この証明では、重みに $1 - \chi_K$ を掛けて $\lambda \ge 0$ にした結果、$L(s,\psi)$ の零点は正の（無害な）留数、ひねった $L(s,\psi\chi_K)$ の零点は負の（有害な）留数を与える。有害な側を、素数 d の選び方（補題 27、二次のひねりの零点密度）で箱の外へ追い出す。定理 31 の仮定が L の実の零点について何も言わないのは、このため。

■族の和から、個々の L 関数へ。 誤差項は一つの L 関数ではなく、法 q_0 の全部の $L(s,\psi)$（とそのひねり）の族に対応する。それでも個々の L 関数についての結論が出るのは、**零点の位数が非負で、族の和では打ち消し合えない**からである。Landau の補題の結論 $r(\rho)=0$ は、ひねった側の位数が 0 なので $\sum_\psi \operatorname{ord}_\rho E_\psi = 0$ と同じで、各項は非負の整数だから、どの ψ でも $E_\psi(\rho)\neq 0$。

解釈（推測を含む）：打ち消し合わないのは、**類** 1 で数えているから（重みは `residueClass (1 : ZMod q)` で類 1 に制限されている。ここまではソースで確かめた）。類 a への制限は $\mathbf{1}_{n\equiv a} = \frac{1}{\varphi(q)}\sum_\psi \bar\psi(a)\psi(n)$ で、変換の極では $L(s,\psi)$ の零点が係数 $\bar\psi(a)$ つきで現れる。$a=1$ なら全部の係数が 1 で正にそろう。$a\neq 1$ なら係数は 1 の冪根で、異なる ψ の零点が打ち消し合いうる。逆に、この方法では個々の L 関数ごとの誤差項の評価は得られないが、零点の結論には要らない。

■誤差項を直接評価する、という向き。「誤差項を直接評価して、零点が無いことを出す」向きは、同値の片側として古典的で、リーマン予想への攻め方として昔からある：素数定理の初等的証明（Selberg、Erdős 1949）、ゲルフォント–シュニレルマンの方法（整数係数の多項式 P について $\int_0^1 P$ の分母は $\operatorname{lcm}(1,\dots,n+1)=e^{\psi(n+1)}$ を割り、0 でなければ $|\int_0^1 P|\geq e^{-\psi(n+1)}$。大きさと整除性の比較からチェビシェフ型の評価）、有限体上の曲線のリーマン予想の Stepanov – Bombieri の証明（点の個数を補助多項式で直接評価）。MainInequality.lean の冒頭も、関連文献に Pritsker（ゲルフォント–シュニレルマンの方法と素数定理、2005）、Granville – Stark（2000）、Bombieri（Bourbaki 430、1973）、van Frankenhuijsen（2008）を挙げている。**解釈**（推測を含む）：主不等式は「大きさ 対 整除性」の形で、定理 C と積公式（0 でない代数的数の高さは 0 以上）が整除性の側、定理 A・B が大きさの側にあたる。

■なぜゼータを直接評価しないか。 解釈（推測を含む）：ゼータだけなら $\psi(x)-x\leq x^\beta$ という片側の評価で（ζ は $(0,1)$ に実の零点を持たないので）原理的には足りる。それでも K で分解しない素数の類 1 の数え上げを評価するのは、主不等式の整除性の側が CM 体 E の算術（テータ関数、CM 楕円曲線の周期、ガロア表現）から来て、そこで自然に「割り切る」のが K で分解しない素数で、法 q_0 の類への制限は E の無限素点の選び方から来る（補題 12）からだと思われる。この方法で直接評価できるのはこの数え上げだけだが、その代わり法 q_0 の全部の L 関数を同時に含む。ζ は法 1 の自明な指標の L 関数として、法 18480 に上げた族の中に入っている（定理 33、系 40）。**ζ は特別扱いされず、全部のディリクレ L 関数の GRH がまとめて示され、リーマン予想はその一例として出る。**

段 9：$\operatorname{Re} s > 1/2$ での非消滅

一言でいうと、**法を $q_0 = 18480\,q$ に上げ、定理 22（片側の評価）を定理 31（判定法）の仮定に差し込み、最後に法を下げる**（New/Reduction/OneSidedBound.lean:239、29 行）。

定理 33. どの正の整数 q、法 q のどの指標 χ、$\operatorname{Re} s>1/2$ のどの s についても、$\chi\neq 1$ または $s\neq 1$ なら $L(s,\chi)\neq 0$。

Lean（New/Reduction/OneSidedBound.lean:239）：

```
theorem grh : DirichletLNonvanishingRightOfHalf := by
```

Proof. ρ を $\operatorname{Re}\rho>1/2$ とする。

(0) $\rho = 1$ **のとき。**仮定から $\chi \neq 1$。$L(1,\chi) \neq 0$ はディリクレの定理（Mathlib の `LFunction_ne_zero_of_one_le_re`）。以下 $\rho \neq 1$。

(1) β **を選ぶ。**$1/2 < \beta < \mathrm{Re}\,\rho$ の β を取る。零点が無いと示す半平面の境界で、ρ の少し左に置く。

(2) **法を上げる。**$q_0 = 18480\,q$、$d_0 = 9240\,q - 1$ とおく。$d_0 + 1 = 9240\,q$ なので $q_0 = 2(d_0+1)$、すなわち $d_0 = q_0/2 - 1$（定理 22 の条件の形）。$9240q$ は偶数なので d_0 は奇数、$\gcd(d_0, 2(d_0+1)) = 1$ なので d_0 と q_0 は互いに素。$9240 = 8 \cdot 1155$ なので $d_0 \equiv -1 \equiv 7 \pmod 8$、$8 \mid q_0$（定理 31 の条件）。$18480 \mid q_0$（定理 22 の条件）。

(3) **定理 31 の仮定を、定理 22 で満たす。**$d \equiv d_0 \pmod{q_0}$ の素数 d を取ると $d \equiv q_0/2 - 1 \pmod{q_0}$。定理 22 を $\varepsilon = \beta - 1/2 > 0$ で使うと、十分大きい x で $R_{q_0}(x) \le x^{-1/2+\varepsilon} = x^{\beta-1}$。

(4) **定理 31 を当てる。**χ を法 q_0 に上げた指標 χ'（`χ.changeLevel`）について、$\rho \neq 1$、$\beta < \mathrm{Re}\,\rho$ だから $L(\rho,\chi') \neq 0$。

(5) **法を下げる。**$L(s,\chi') = L(s,\chi)\prod_{p \mid q_0,\ p \nmid q}(1 - \chi(p)p^{-s})$（`LFunction_changeLevel`）。積が 0 でないので $L(\rho,\chi) \neq 0$（`left_ne_zero_of_mul`）。 □

注意 34 (d ごとに別のデータ)**.** (3) では、類 d_0 の**無限個の**素数 d のそれぞれについて、別のパラメータ $P = (q_0, d)$、別の体 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$、別の許容データで、主不等式を一から使って片側の評価を示している。

注意 35 (なぜ法を $18480\,q$ に上げるか)**.** 定理 31 は法 q_0 の指標についてしか結論を出さないので、χ を一度法 q_0 に上げる。法を上げても L 関数は有限個のオイラー因子が変わるだけなので、$\mathrm{Re}\,s > 0$ の零点の情報は失われない。q_0 が 18480 の倍数で $d \equiv q_0/2 - 1$ であることは、定理 22（許容データの構成）の側の条件である。**解釈**（推測を含む）：$d \equiv q_0/2 - 1$ は $-d \equiv 1 \pmod{q_0/2}$ と同じで、q_0 を割る奇素数 p では $-d$ が平方剰余になり p は K で分解する。$d \equiv 7 \pmod 8$ から $-d \equiv 1 \pmod 8$ で 2 も分解する（GUIDE の「q_0 を割る素数は K で分解する」と合う。補題 12 の計算の「q_1 と素でない ν では $\Lambda_K(\nu) = 0$」はこれによる）。$18480 = 16 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ という具体的な数が要る理由は、データの構成の細部による（未読）。

注意 36 (量の対応)**.** 示したい零点 ρ（$\mathrm{Re}\,\rho > 1/2$）$\to$ 境界 $\beta \in (1/2, \mathrm{Re}\,\rho)$ $\to$ 指数 $\varepsilon = \beta - 1/2$ $\to$ スケール $\log b \approx x^{\varepsilon}$、$x_1 \approx \exp(x^{\varepsilon/6})$（命題 15）。$\mathrm{Re}\,\rho$ が $1/2$ に近いほど ε は小さく、使うスケールは大きい。

段 10：臨界線と、リーマン予想

定理 33 は「右半分」$\mathrm{Re}\,s > 1/2$ の主張である。零点が臨界線の上に在ることには、「左半分」$\mathrm{Re}\,s < 1/2$ に零点が無いことも要る。これを関数等式で右半分に折り返す。どちらの証明も、零点 s を関数等式で $1 - s$ と組にし、組の両方に定理 33 を当てる、という形である（New/Main.lean、それぞれ 20 行ほど）。

系 37. どの法 N のどの指標 χ についても、$0 < \mathrm{Re}\,s < 1$ で $L(s,\chi) = 0$ なら $\mathrm{Re}\,s = 1/2$。

Lean（New/Main.lean:28）：

```
lemma New.zeros_on_line : DirichletLZerosOnLine := by
```

Proof. (1) $0 < \operatorname{Re} s < 1$ なので $s \neq 1$、また $\operatorname{Re}(1-s) > 0$ なので $s \neq 0$ ($1-s \neq 1$)。

(2) **ガンマ因子は消えない。** 完備化は $\Lambda(s,\chi) = \Gamma_{\mathbb{R}}(s+a)\,L(s,\chi)$ ($a \in \{0,1\}$ は χ の偶奇)。$\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$ は 0 にならず、極は $s = 0, -2, -4, \dots$ だけなので、$\operatorname{Re} s > 0$ では $\Gamma_{\mathbb{R}}(s+a)$ は有限で 0 でない。

(3) **関数等式。** Mathlib の `gammaFactor_eq_zero_or_LFunction_one_sub_eq_zero`：$s \neq 0, 1$ で $L(s,\chi) = 0$ なら、ガンマ因子が極に在るか、$L(1-s,\chi^{-1}) = 0$。(2) より前者は無いので $L(1-s,\chi^{-1}) = 0$。零点 s が、指標を χ^{-1} に替えた零点 $1-s$ と組になる。

(4) **定理 33 を二回当てる。** (χ, s) に当てると、$s \neq 1$ で $L(s,\chi) = 0$ なので $\operatorname{Re} s \leq 1/2$。$(\chi^{-1}, 1-s)$ に当てると、$1-s \neq 1$ で $L(1-s,\chi^{-1}) = 0$ なので $\operatorname{Re}(1-s) \leq 1/2$、すなわち $\operatorname{Re} s \geq 1/2$。合わせて $\operatorname{Re} s = 1/2$。 □

注意 38. (4) で χ だけでなく χ^{-1} についても定理 33 を使う。定理 33 が**すべての**指標について成り立つことが効く。

注意 39 ($\operatorname{Re} s \leq 0$ を扱わない理由)**.** 主張は $0 < \operatorname{Re} s < 1$ の零点だけを扱う（README もそう断っている)。法 N の指標 χ が原始的でないとき、$L(s,\chi)$ は原始指標 χ^* の L 関数に有限個のオイラー因子 $(1-\chi^*(p)p^{-s})$ を掛けたもので、これらの因子は直線 $\operatorname{Re} s = 0$ の上に零点を持つ。だから $\operatorname{Re} s \leq 0$ には自明な零点以外の零点もありえて、「全部の零点が臨界線の上」とは言えない。

系 40. $s \notin \{1, -2, -4, \dots\}$ で $\zeta(s) = 0$ なら $\operatorname{Re} s = 1/2$。

Lean（New/Main.lean:47)：

```
lemma New.zeta_zeros_on_line : RiemannZetaZerosOnLine := by
```

Proof. (1) $\zeta(0) = -1/2 \neq 0$ なので $s \neq 0$。

(2) $\Gamma_{\mathbb{R}}(s)$ の極は $0, -2, -4, \dots$ で、どれも除いてあるので、$\Gamma_{\mathbb{R}}(s)$ は s で極に無い。

(3) **完備ゼータに移る。** Mathlib では $s \neq 0$ で $\zeta(s) = \xi(s)/\Gamma_{\mathbb{R}}(s)$（`riemannZeta_def_of_ne_zero`、$\xi$ は `completedRiemannZeta`)。(2) より $\xi(s) = 0$。

(4) **関数等式** $\xi(1-s) = \xi(s)$（`completedRiemannZeta_one_sub`）より $\xi(1-s) = 0$。$1-s \neq 0$ なので $\zeta(1-s) = \xi(1-s)/\Gamma_{\mathbb{R}}(1-s) = 0$（$\Gamma_{\mathbb{R}}(1-s)$ が極に当たる場合も、Mathlib の約束では値が 0 なので結論は同じ)。

(5) **ζ は法 1 の自明な指標の L 関数**（Mathlib で $L(s, 1 \bmod 1) = \zeta(s)$)。定理 33 を $N = 1$、$\chi = 1$ で、s（$s \neq 1$）と $1-s$（$1-s \neq 1$）に当てると、$\operatorname{Re} s \leq 1/2$ と $\operatorname{Re}(1-s) \leq 1/2$。合わせて $\operatorname{Re} s = 1/2$。 □

注意 41. 系 37 と違って $0 < \operatorname{Re} s$ の仮定は要らない。ζ には余分なオイラー因子が無く、自明な零点と $s = 0, 1$ を除けば、関数等式が全部を折り返す。

系 42 (リーマン予想)**.** *Mathlib* の `RiemannHypothesis` が成り立つ。

Lean（Main.lean)：

```
theorem riemannHypothesis : RiemannHypothesis := New.zeta_zeros_on_line New.grh
```

Proof. Statements.lean の `RiemannZetaZerosOnLine` ($\forall s,\ \zeta(s) = 0 \to (\neg\exists n,\ s = -2(n+1)) \to s \neq$

$1 \to \mathrm{Re}\, s = 1/2$）は、Mathlib の `RiemannHypothesis` と同じ形の命題なので、系 40 がそのまま主張である。 □

注意 43 (Mathlib の約束)**.** 条件の付き方に、Mathlib の関数の約束が表れている。`riemannZeta` は $s = 1$ でも値を持つ（極ではなく有限の値を与えている）ので、主張に $s \neq 1$ が要る。`Gamma`$\mathbb{R}$ は極で値 0 を取り、Lean では 0 での割り算も 0 なので、「$\Gamma_{\mathbb{R}}(s) \neq 0$」は「$s$ が極でない」の意味になる（系 37 の証明の (2)、系 40 の証明の (2) がこの確認）。

要点

- **指数 $1/2$ の出どころ**：主不等式の左辺の $m \geq \sqrt{x}$ が、誤差項の評価に節約 $1/m \leq x^{-1/2}$ を与え（系 14、命題 20）、片側の評価の指数 $-1/2$ になる。これが判定法の $\beta - 1$ を通して $\mathrm{Re}\, s > 1/2$ に対応する。
- **二つの切り口**：b-places の重み b が x までの和を、それ以外の重み a/x_1 が x_1 までの和を選び出し（補題 12）、主不等式は $R(x)$ を、ずっと大きい x_1 での値と比べる形になる。x_1 では素数定理で R がほぼ 0（補題 19）。
- **非負性**：$\lambda \geq 0$ と、ひねった L の零点を避ける d の選び方で、留数の符号がそろい、Landau の補題が使える。
- **データの存在にも数論が要る**：Behrend 型の構成、ジーゲル–ウォルフィッツ、類群（命題 15 の後の注意）。
- **議論の新しい中身は定理 9 だけ**。

compact 版との違い

compact 版（grh-compact/）も同じ骨格だが、

- 補題 19 の素数定理の代わりに、`IsPolar.exists_window_sub_mul_le`（New/Endgame/OneSidedCriterion.lean）で、$\log x_1$ を窓 $[t, t^2]$ の中の、$R_{N_0} - c\, R_1 \leq e^{-t}$ となる点に動かす。
- 段 2〜6 を一つの補題 `eventually_primeError_le_rpow`（New/Main.lean）にまとめている。主不等式の右辺は $(\log b)^2 \cdot fa(\log b)^3$ の形（`D.logB ^ 2 * D.budget`）。

読んでいない所

- 補題 28 の留数の式の導き方、定理 18 のタウバー型の証明。
- 命題 15 の構成の細部（Behrend 型の集合、素数の窓、類群）。
- 補題 30 と補題 27 の証明。
- 定理 9（主不等式）の証明。b-places が疎であること、N の窓の狭さなど、データの条件がどこで要るか。